

Bermuda-Put-Optionen nach Geske und Johnson

KONVERGENZANALYSE UND ZUSAMMENHANG MIT AMERIKANISCHEN
PUT-OPTIONEN

Inauguraldissertation
zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
der Universität Mannheim

vorgelegt von
Dipl.-Math. Denis Boldin
aus Nowaja Gara

Mannheim, 2013

Dekan: Prof. Dr. Heinz Jürgen Müller, Universität Mannheim

Referent: Prof. Dr. Hans-Jochen Bartels, Universität Mannheim

Korreferent: Prof. Dr. Alexander Schied, Universität Mannheim

Tag der mündlichen Prüfung: 26. November 2013

Zusammenfassung

Der Idee von Geske und Johnson folgend wird der Preis einer amerikanischen Put-Option durch den Preis einer n -Bermuda-Put-Option approximiert. Die Problematik der Berechnung von der in der analytischen Bewertungsformeln von Geske und Johnson auftretenden multidimensionalen Normalverteilungsfunktionen wird hierbei durch die Early-Exercise-Prämie-Darstellung (EEP-Darstellung) für den Preis einer n -Bermuda-Put-Option umgangen. Es wird gezeigt, dass der Fehlerterm in der EEP-Darstellung von der Ordnung $\mathcal{O}(\sqrt{\Delta_n})$ ist. Dies eröffnet einen numerischen Zugang zur Berechnung des Preises für große n . Basierend auf der Abschätzung für die Differenz der Preise der amerikanischen und n -Bermuda-Put-Optionen werden Abschätzungen für die Differenz der kritischen Ränder beider Optionstypen hergeleitet. Weiterhin werden ein explizites Abbruchkriterium sowie Algorithmen zur Berechnung des Preises einer amerikanischen Put-Option vorgeschlagen.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1. n-Bermuda-Put-Option nach Geske und Johnson	11
1.1. Finanzmarktmodell	12
1.2. Preis einer n -Bermuda-Put-Option	13
1.3. Konvergenz	23
1.3.1. Konvergenz der Preise	23
1.3.2. Konvergenz der kritischen Ränder	27
1.3.3. Konvergenz der einzelnen Terme in der Geske-Johnson-Formel	33
1.4. Early-Exercise-Prämie	35
1.4.1. Iwaki-Kijima-Yoshida-Darstellung für die Early-Exercise-Prämie einer n -Bermuda-Put-Option	36
1.4.2. Alternative Darstellung für die Early-Exercise-Prämie einer n -Bermuda-Put-Option	40
2. Sensitivitäten der n-Bermuda-Put-Option	51
2.1. Hilfssätze und Lemmata	51
2.2. Greeks	62
2.3. Beziehungen zwischen den partiellen Ableitungen	71
3. Kritischer Rand	79
3.1. Existenz und Eindeutigkeit	79
3.2. Monotonie	81
3.3. Weitere Eigenschaften des kritischen Randes	82
4. Numerische Studie	89
4.1. Das Binomialmodell	89
4.1.1. Bewertung im Binomialmodell	89
4.1.2. Kritischer Rand im Binomialmodell	93
4.1.3. Boundary-Algorithmus	101
4.2. n -Bermuda-Put-Option im Black-Scholes-Modell	105
4.2.1. Direkte Berechnung	105
4.2.2. Approximative Berechnung	115
Zusammenfassung	129

A. Multivariate Normalverteilung	133
B. Einige Beweise und Bemerkungen	139
C. MATLAB - Code	145
C.0.3. Implementierung im Binomialmodell	145
C.0.4. Implementierung im Black-Scholes-Modell	149
Literatur	153

Einleitung

Seit der mit dem Nobelpreis gekrönten Arbeit von Black und Scholes [10] in den 1970er Jahren ist der Handel mit derivativen Instrumenten massiv angestiegen. Gleichzeitig wurde auch das Interesse an der Erforschung dieser Instrumente (hier Optionen) geweckt und in zunehmendem Maße vorangetrieben. Zu den verbreitetsten Optionsarten auf ein Underlying (hier Aktie) gehören die Optionen des europäischen und amerikanischen Typs. Wenngleich für europäische Optionen die geschlossenen Preisformeln noch in der Originalarbeit von Black und Scholes [10] angegeben wurden, wurde für den Preis einer amerikanischen Put-Option bis heute kein geschlossener analytischer Ausdruck gefunden.

Aufgrund der großen praktischen Bedeutung, die amerikanische Put-Optionen auf dem internationalen Finanzmarkt heutzutage darstellen und trotz großer Forschungsanstrengungen deren Preis entweder analytisch oder numerisch in den Griff zu bekommen, besteht nach wie vor Entwicklungsbedarf nach effizienten und robusten Berechnungsverfahren.

Die Anzahl der Arbeiten, die sich mit der Fragestellung der Bewertung amerikanischer Put-Optionen in den letzten 40 Jahren beschäftigt haben, ist erheblich angewachsen, so dass einige Autoren (vgl. Broadie und Detemple [17]) den Versuch unternommen haben, diese zu klassifizieren, um den Überblick zu bewahren. Diesem Beispiel werden wir uns anschließen und eine eigene Klassifizierung vornehmen, nachdem wir vorher kurz die aus unserer Sicht und im Hinblick auf diese Arbeit wichtigsten Ergebnisse vorgestellt haben.

Literaturübersicht

Die ersten Charakterisierungen des Preises amerikanischer Put-Optionen¹ als Lösung eines freien Randwertproblems (*free boundary problem*) gehen auf McKean [88] und Merton [89] zurück. McKean [88] hat für den Wert einer amerikanischen Put-Option eine Integraldarstellung (McKean-Darstellung) erhalten, welche den unbekannten freien (kritischen) Rand, den sogenannten *free boundary*, enthält. Die Auswertung der Preisformel am Rand führte zu einer Integralgleichung für den kritischen Rand, der sogenannten *free boundary equation*. Trotz ihrer mathematischen Gültigkeit liefert die McKean-Darstellung

¹In der vorliegenden Arbeit werden amerikanische Put-Optionen im Black-Scholes-Modell ohne Dividenden untersucht. Wegen der Put-Call-Symmetrie (vgl. McDonald und Schroder [87]) im Modell mit Dividenden, ist es somit keine große Einschränkung, wenn weiter unten nur amerikanische Put-Optionen erwähnt werden (selbst wenn die Autoren amerikanische Call-Optionen untersucht haben).

keine befriedigende Antwort für das Problem der Bewertung amerikanischer Optionen. Zum einen beinhaltet die Integraldarstellung nicht nur den unbekannten kritischen Rand, sondern auch dessen Ableitung, was aufgrund der unendlichen Steigung des Randes bei Fälligkeit der Option zu Schwierigkeiten bei der numerischen Evaluation des Integrals führt. Zum anderen, was noch wichtiger ist, kann aus der McKean-Darstellung keine ökonomische Interpretation für die Preise amerikanischer Optionen gewonnen werden. Außerdem fehlt die Verbindung zu den essentiellen Begriffen der modernen Finanzmathematik wie die No-Arbitrage bzw. Hedge-Portfolio-Strategie, die seit den Arbeiten von Harrison und Kreps [47] und Harrison und Pliska [48] zu festen Bestandteilen der Bewertung derivativer Instrumente gehören.

Die eleganten Bewertungsmethoden aus den Arbeiten von Harrison und Kreps [47] und Harrison und Pliska [48] wurden von Bensoussan [9] und später von Karatzas [69] auf amerikanische Optionen übertragen. Danach lässt sich der Preis als das kleinste Supermartingal, das das Auszahlungsprofil der Option majorisiert, nämlich die sogenannte Snell'sche Einhüllende (*Snell envelope*), beschreiben. Das gab den Vorstoß für den Ansatz von mehreren Methoden (z.B. eine Reihe von Monte-Carlo-Methoden) zur numerischen Bestimmung der Preise amerikanischer Optionen.

Carr et al. [20], Jacka [57] und Kim [71] sind der Lösung des Problems der Preisbestimmung amerikanischer Optionen einen Schritt näher gekommen. Die Autoren haben unabhängig voneinander eine alternative Charakterisierung des Preises einer amerikanischen Option (der sogenannten Early-Exercise-Prämie-Darstellung) vorgeschlagen, wonach sich dieser als der Preis einer europäischen Option zuzüglich einer Prämie (Early-Exercise-Prämie) darstellen lässt. Dabei besitzt die Early-Exercise-Prämie, im Gegensatz zur McKean-Darstellung, eine klare ökonomische Interpretation. Sie ist nämlich der Barwert aller akkumulierten Zinsen auf den Ausübungspreis, solange der Aktienkurs sich unter dem kritischen Rand befindet. Außerdem wurde in [20] eine Handlungsstrategie explizit beschrieben, die zu der Early-Exercise-Prämie-Darstellung (EEP-Darstellung) führt. Die Auswertung der EEP-Darstellung am kritischen Rand, gepaart mit der Tatsache, dass dort der Preis einer amerikanischen Option gleich ihrem inneren Wert ist, führte somit zu einer neuen Integralgleichung für den kritischen Rand. Die Eindeutigkeit des Randes als Lösung dieser Integralgleichung blieb bis zur Arbeit von Peskir [95] ungeklärt, in welcher er mit Hilfe einer erweiterten Itô-Formel (*change-of-variable formula with local time on curves*) aus seiner früheren Arbeit [94] die Eindeutigkeit belegt hat. Dabei wird bei der Herleitung der EEP-Darstellung mit seinen Methoden kein Gebrauch von der folgenden nicht zuvor exakt bewiesenen Bedingung gemacht: $t \mapsto P^A(t, x)$ ist C^1 auf dem Rand S_t^* . Somit wurden die letzten Unklarheiten bei der Herleitung der EEP-Darstellung aus dem Weg geräumt. Eine Verbindung zwischen der McKean-Darstellung und der EEP-Darstellung wurde von Chiarella et al. [24] hergestellt, indem sie gezeigt haben, dass beide Darstellungen ineinander überführbar sind (vgl. auch Kim [71]).

Für Arbeiten, die sich konkret mit der numerischen Berechnung des Preises einer amerikanischen Put-Option beschäftigen, wird in der Literatur oft eine grobe Unterteilung in zwei Klassen vorgenommen: analytische und numerische Approximationen. Eine ein-

heitliche und exakte Beschreibung dieser Klassifizierung ist in der Literatur allerdings nicht vorhanden und viele der unten beschriebenen Methoden können beiden Klassen gleichzeitig zugeordnet werden.

Analytische Approximationen: In diese Klasse werden wir alle Arbeiten einordnen, deren Methoden direkt aus dem *free boundary problem*, oder der EEP-Darstellung hervorgehen.

Quadratische Approximationen. MacMillan [86] und später Baron-Adesi und Whaley [6] verwendeten die sogenannte Methode der *quadratischen Approximation* zur approximativen Bestimmung der Preise amerikanischer Put-Optionen. Dieser Ansatz wurde von Baron-Adesi und Elliott [5], Ju und Zhong [66] und jüngst von Li [82] weiterentwickelt bzw. von einigen Autoren, wie z.B. Guo et al. [46] auf allgemeinere Modelle übertragen. Die Methode der quadratischen Approximation basiert auf der Idee, dass die Early-Exercise-Prämie (EEP) nur einen kleinen Teil des Gesamtpreises einer amerikanischen Put-Option beträgt. Der Großteil des Preises, nämlich der Preis einer europäischen Put-Option, ist bekannt und kann exakt berechnet werden. Die großen relativen Abweichungen bei der Berechnung der EEP haben daher geringe Auswirkung auf den Preis einer amerikanischen Put-Option selbst. Beginnend mit der Funktion $\epsilon(S, \tau) = P^A(S, \tau) - p^E(S, \tau) := Q(\tau)f(S, Q)$ (üblicherweise $Q(\tau) := 1 - e^{-r\tau}$) wird für die EEP $\epsilon(S, \tau)$ aus der Black-Scholes-Differentialgleichung

$$-\frac{\partial \epsilon}{\partial \tau} + rS \frac{\partial \epsilon}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial S^2} - r\epsilon = 0$$

und abhängig von weiteren Annahmen über das Verhalten der Funktion $f(S, Q)$ und der partiellen Ableitungen von ϵ , eine Lösung der Form $\epsilon(S, \tau) = A(S, \tau)(S/S_\tau^*)^{\gamma(\tau)}$ gewonnen. Den Namen *quadratisch* verdankt diese Approximation der Tatsache, dass der quadratische Term $Q(1 - Q)\frac{\partial f}{\partial Q}$ im Rechnungsverlauf ignoriert wird.

Interpolationsmethoden. Ein interessanter und naheliegender Ansatz nach einer oberen und unteren Schranke für eine amerikanische Put-Option zu suchen und gegebenenfalls den Wert der Option als Interpolationswert der beiden Schranken darzustellen, wurde von Johnson [61] und Broadie und Detemple [17] verfolgt. Broadie und Detemple verwendeten dabei eine Capped-Option als untere Schranke, wohingegen Johnson [61] europäische Put-Optionen mit verschiedenen Ausübungspreisen als obere und untere Schranken einsetzte. Genauer folgerten sie aus $p^E(S, \tau; K) \leq P^A(S, \tau; K) \leq p^E(S, \tau; K^{e^{r\tau}})$ für den Wert der amerikanischen Put-Option

$$P^A(S, \tau; K) = \alpha p^E(S, \tau; K) + (1 - \alpha)p^E(S, \tau; K^{e^{r\tau}}), \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Der Parameter α ist in der obigen Gleichung keine Konstante, sondern eine Funktion der Variablen S, K, τ, r und σ . Genau hier liegt die große Schwierigkeit bei diesem Ansatz, nämlich der approximativen Ermittlung der Funktion α . Li [81] verfolgte die Idee von Johnson [61], um eine Darstellung für den kritischen Preis einer amerikanischen Put-Option zu bekommen. Später übertrug Li [83] diesen Ansatz auf die Bewertung amerikanischer Multiasset-Optionen.

Der Nachteil aller bisher aufgelisteten Methoden beruht auf der Tatsache, dass der Approximationsfehler nicht quantifiziert werden kann und es somit keine bekannten Fehlerabschätzungen gibt. Weiterhin sind die Methoden nicht konvergent, was bedeutet, dass es nicht möglich ist die Genauigkeit der Berechnung z.B. durch Hinzunahme von „weiteren Termen“ zu erhöhen (vgl. Barone-Adesi [4], Li [82]). Der Vorteil liegt in der Geschwindigkeit der Verfahren, denn die gesuchten Größen (kritischer Rand oder Preis der Option selbst) sind entweder explizit als Funktionen von Modellparametern dargestellt oder werden nach wenigen Rechenschritten (etwa mit Hilfe der Newton-Raphson-Methode) ermittelt.

Geske-Johnson-Methode. Geske und Johnson [41] haben vorgeschlagen eine amerikanische Put-Option als den Grenzwert einer (n -)Bermuda-Put-Option (eine Option mit diskreten Ausübungsmöglichkeiten) zu betrachten. Weiterhin haben die Autoren sowohl eine analytische Preisformel für die Bermuda-Option, als auch alle für Hedging-Zwecke relevanten partiellen Ableitungen angegeben (beides ohne Beweis). Der größte Vorteil des Ansatzes von Geske und Johnson im Vergleich zu allen anderen existierenden Verfahren besteht darin, dass eine exakte Abschätzung für die Differenz der Preise einer amerikanischen und einer Bermuda-Put-Option angegeben werden kann (vgl. Carverhill und Weber [21]). Andere (wenige) Verfahren können im besten Fall nur die Konvergenzordnung angeben. Allerdings ist die analytische Geske-Johnson-Formel sehr restriktiv für große n anwendbar, aufgrund der dort auftretenden multivariaten Normalverteilungen. Um die Berechnung hochdimensionaler Verteilungsfunktionen der Normalverteilung zu vermeiden und dennoch von der Konvergenz der Preise Gebrauch zu machen, wurde von Geske und Johnson die sogenannte Richardson-Extrapolation vorgeschlagen. Seither wird diese in vielen Arbeiten, z.B. Breen [14], Broadie und Detemple [17], Chang et al. [22], Huang et al. [51], Ibáñez [54], Kallas und Kivinukk [67], als eine der gängigsten Konvergenz-Beschleunigungstechniken bei der Bewertung derivativer Instrumente eingesetzt. Erwähnenswert ist, dass Kim [71] den Ansatz von Geske und Johnson weiterverfolgte, um durch den Grenzübergang zur Early-Exercise-Prämie-Darstellung für amerikanische Put-Optionen zu gelangen.

EEP-Methoden. Zu dieser Gruppe gehören alle Verfahren, die auf der Early-Exercise-Prämie-Darstellung von Carr et al. [20] (bzw. von Kim [71] und Jacka [57]) basieren:

$$P^A(S_0, T) = p^E(S_0, T) + rK \int_0^T e^{-ru} \mathbb{E}^* [\mathbb{1}_{\{S_u < S_u^*\}} \mid S_0] du. \quad (0.1)$$

Durch eine Diskretisierung des Integrals wird zunächst der kritische Rand S^* , ausgehend von $S_T^* = K$ induktiv (rückwärts) ermittelt und danach der Preis P^A selbst bestimmt. Wenngleich Kim [71], Huang et al. [51] und Broadie und Detemple [17] noch ihre Zweifel bezüglich der Effizienz dieses Verfahrens äußerten, wurden von Kallas und Kivinukk [67], Ibáñez [54] und Chiarella et al. [24] stabile und erstaunlich schnelle Ergebnisse mit der EEP-Methode erzielt. Als Beschleunigungstechnik wurde die Richardson-Extrapolation eingesetzt und diskutiert.

Kritischer Rand. Wie aus der EEP-Darstellung (0.1) hervorgeht, hängt der Preis einer amerikanischen Put-Option von einem (unbekannten) kritischen Rand S^* ab. Sobald dieser bekannt wird, kann der Preis selbst beliebig genau berechnet werden (vgl. auch Lemma 1.52 in dieser Arbeit). Aus diesem Grund haben sich einige Autoren nicht direkt auf die Bewertung konzentriert, sondern Methoden zur Berechnung des kritischen Randes entwickelt. Bunch und Johnson [19] berechneten den kritischen Preis zur Zeit t aus der Relation $\frac{\partial P^A(S, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{S=S_t^*} = 0$, mit der Restlaufzeit $\tau = T - t$. Intuitiv bedeutet das: bei einer optimalen Ausübung der Option spielt die Restlaufzeit keine Rolle mehr. Carr et al. [20] benutzten die Eigenschaft, dass der Preis einer amerikanischen Put-Option auf der Menge $\{S_0 < S_0^*\}$ (*stopping region*) gleich ihrem inneren Wert ist, d.h. $P^A(S_0, T) = K - S_0$. Das Einsetzen dieser Eigenschaft in die EEP-Darstellung (0.1), das Ableiten der beiden Seiten der Formel nach S_0 und der anschließende Grenzübergang $S_0 \uparrow S_0^*$ führen zu einer neuen Integralgleichung für den kritischen Rand S^* . Dieser Ansatz wurde von Little et al. [84] weiterverfolgt. Die zweite Ableitung nach dem Aktienkurs S_0 bei sonst identischer Vorgehensweise wie der von Carr et al. [20] liefert eine weitere Integraldarstellung für den kritischen Rand. Ableitungen höherer Ordnung führen somit zu einer Familie der Integralgleichungen für den kritischen Rand S^* . Ju [65] bemerkte, dass der kritische Preis (zur Zeit t) in der EEP-Darstellung nur im Logarithmus als $\log(S_0/S_t^*)$ erscheint. Dementsprechend hat er vorgeschlagen den kritischen Rand im Intervall $[t_i, t_{i+1}]$ mit einer Exponentialfunktion (statt einer konstanten Funktion) der Form $a \exp(bt)$ für $t \in [t_i, t_{i+1}]$, mit unbekannten und noch zu bestimmenden Konstanten a und b , zu approximieren. Der Vorteil dieses Ansatzes liegt darin, dass für das Integral in (0.1) in diesem Fall eine geschlossene Formel für die Stammfunktion angegeben werden kann.

An dieser Stelle ist es wichtig zu erwähnen, dass obwohl die Approximation des kritischen Randes und des Preises der Option selbst eng miteinander verbundene Problemstellungen sind, beide getrennt voneinander behandelt werden können. Insbesondere ist es möglich eine gute Approximation an den Preis zu finden, ohne den kritischen Rand genau zu treffen. Das werden auch die Ergebnisse dieser Arbeit bestätigen (siehe z.B. Lemma 1.52).

Kritischer Rand bei Fälligkeit. Das asymptotische Verhalten des kritischen Randes bei Fälligkeit der Option wurde von Barles [3], Lamberton [76], [79], Kuske und Keller [73] und Evans et al. [33] ausführlich studiert.

Numerische Approximationen:

Finite-Differenzen-Methoden. Schwartz [104] und Brennan und Schwartz [15], [16] haben Finite-Differenzen-Methoden basierend auf der Diskretisierung des *free boundary problem* zur numerischen Berechnung der Preise amerikanischer Optionen vorgeschlagen. Aufgrund der umfangreichen Theorie dazu, die auch für mathematische Probleme anderer Natur angewandt und weiter entwickelt wird, ist dieser Ansatz zu einem festen Bestandteil und zu einer der Standardmethoden bei der numerischen Bestimmung der Preise (vor allem in allgemeineren Finanzmarktmodellen) in der Literatur und der Praxis geworden. Die numerische Stabilität und die Konvergenz des Verfahrens im Falle einer amerikanischen Option wurden von Jalliet et al. [58] und Lamberton [75] untersucht.

Monte-Carlo-Methoden. Die Monte-Carlo-Methode (MC-Methode) ist im Wesentlichen ein Verfahren, basierend auf dem Gesetz der großen Zahlen, zur approximativen Berechnung des Erwartungswertes einer Zufallsvariable. Da die Preisbestimmung oft auf die Berechnung eines Erwartungswertes zurückgeführt werden kann, bietet sich die MC-Methode als eine natürliche und elegante Technik für solche Bewertungsprobleme an, insbesondere dann, wenn eine analytische Auswertung eines Erwartungswertes nicht möglich ist. Die grundsätzliche Schwierigkeit bei der Verwendung von MC-Methoden zur Bewertung amerikanischer Put-Optionen liegt in der Verbindung der „Vorwärts-Natur“ der MC-Methoden mit der Rückwärtsinduktion, die bei der Berechnung der Preise amerikanischer Put-Optionen benötigt wird, um die kritischen Ränder zu ermitteln. Vor einiger Zeit herrschte sogar die Meinung, dass MC-Methoden ausschließlich für derivative Instrumente des europäischen Typs angewandt werden können (vgl. Hull und White [53]). Allerdings, wie in den Arbeiten von Tilley [110], Grant et al. [45], Broadie und Glasserman [18], Longstaff und Schwartz [85], Glasserman und Yu [43] gezeigt wurde, kann die MC-Methode auch zur Bewertung amerikanischer Put-Optionen erfolgreich eingesetzt werden. Die Vorteile der MC-Methode liegen in der einfachen Implementierung verknüpft mit einer Vielzahl an Anwendungsmöglichkeiten. Der entscheidende Nachteil ist jedoch eine langsame und nicht monotone Konvergenz des Verfahrens.

Gitter-Methoden. Zu dieser Gruppe gehören alle Arbeiten, bei welchen kontinuierliche stochastische Prozesse (etwa die Modellierung des Aktienverlaufs) durch zeitdiskrete Prozesse approximiert werden, d.h. es wird sowohl der Zeitraum, als auch der Zustandsraum diskretisiert. Der Vorreiter aller Gitter-Methoden ist das Binomialmodell. Seit ihrer Einführung durch Cox et al. [25] und Rendleman und Bartter [101] gehört es zu einem der Standardwerkzeuge (unter anderem auch aufgrund der einfachen Struktur und Implementierung) bei der Bewertung von Optionen sowohl in der Literatur, als auch in der Praxis. Außerdem wird das Binomialmodell überwiegend als das Benchmark-Modell für Optionsbewertungen in der Literatur verwendet. Wir werden hier keine Ausnahme machen und es für den Vergleich mit den in dieser Arbeit entwickelten Methoden heranziehen. Natürliche Erweiterungen der Binomialmodelle sind Trinomialmodelle eingeführt von Boyle [11], [12], später untersucht und modifiziert von Tian [109] und Multinomialmodelle untersucht von Boyle [12], Kamrad und Ritchken [68], Heston und Zhou [49] und Jabbour et al. [56]. Eine Verdünnung der Knoten von Binomial- bzw. Trinomialbäumen in den Bereichen, die für die Preisbildung weniger relevant sind (meist sind es Randbereiche), führt zu den sogenannten verdünnten Bäumen (*lean trees*) eingeführt von Baule und Wilkens [8].

Die Konvergenz der Preise amerikanischer Put-Optionen aus einem zeitdiskreten Modell gegenüber denen aus einem zeitstetigen wurde unter anderem von Amin und Khanna [2], Lamberton [77] und Leisen [80] studiert. Leisen [80] hat für die Preise amerikanischer Put-Optionen im Binomial- und Black-Scholes-Modell die Konvergenz der Ordnung $\mathcal{O}(1/n)$ nachgewiesen. Der Nachteil aller Gitter-Methoden (genau wie der Finite-Differenzen-Methoden) ist die oszillierende Konvergenz der Preise. Zum einen führt das dazu, dass die Erhöhung der Periodenanzahl nicht unbedingt zur Erhöhung der Genauigkeit beiträgt

(evtl. sogar umgekehrt). Zum anderen wird die Anwendung mancher Beschleunigungstechniken (wie z.B. Richardson-Extrapolation) dadurch erschwert. Um dies zu beheben, wurden Glättungstechniken (*smoothing methods*) entwickelt unter anderem von Broadie und Detemple [17], Heston und Zhou [49], Leisen [80] und Joshi [62]. Dazu gehören beispielsweise eine geeignete Positionierung des Ausübungspreises im Baum (z.B. genau in der Mitte zwischen zwei benachbarten Knoten vgl. Joshi [62]) oder eine Anwendung der Black-Scholes-Formel in der vorletzten Periode des Binomialbaumes in der sogenannten *continuation region* (vgl. Broadie und Detemple [17]). Eine weitere Konvergenz-Beschleunigungstechnik, die sogenannte Control-Variates-Technik, wurde von Hull und White [53] zur Bewertung amerikanischer Put-Optionen in einem Binomialmodell eingeführt. Als Control-Variate dient dabei der Preis einer europäischen Put-Option, die im selben Baum bewertet und deren Preis mit dem Black-Scholes-Preis verglichen wird.

Methoden der Nichtstandard-Analysis. Cutland et al. [29] verwendeten Methoden der Nichtstandard-Analysis (insbesondere D^2 -Konvergenz, abgeleitet vom Konzept des SL^2 -liftings der Nichtstandard-Analysis), um die Konvergenz von zeitdiskreten zu zeitstetigen Modellen zu untersuchen, mit dem Vorteil, dass die Konvergenz der Snell envelopes und kritischen Ränder nicht extra nachgewiesen werden muss.

Methodenvergleich: Wir listen hier noch die Arbeiten auf, die sich intensiv mit dem Vergleich der oben beschriebenen Methoden beschäftigt haben: Broadie und Detemple [17], AitSahlia und Carr [1], Ju und Zhong [66], Basso et al. [7], Fu et al. [34], Staunton [107], Barone-Adesi [4], Pressacco et. al [100], Joshi [63] und Li [82]. Eine gute Beschreibung der bekanntesten analytischen, sowie numerischen Verfahren findet sich im Buch von Kwok [74]. Die Arbeit von Myneni [93], die alle wesentlichen Ergebnisse zur Bewertung amerikanischer Put-Optionen zusammenfasst, darf an dieser Stelle auch nicht vergessen werden.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass es nicht die Methode zur Berechnung der Preise amerikanischer Put-Optionen gibt. Je nach Problemstellung und Anforderungen in Bezug auf Genauigkeit, Schnelligkeit, Erweiterbarkeit, Implementierbarkeit, Verständlichkeit, Interpretierbarkeit usw. weist die eine oder die andere Methode einen Vorteil auf. Daher bleibt die Konstruktion und Analyse analytischer Approximationen sowie weiterer effizienter numerischer Verfahren weiterhin Gegenstand aktueller Forschung.

Ziele und Gliederung der Arbeit

Der Ansatz von Geske und Johnson [41] zur Berechnung der Preise amerikanischer Put-Optionen im Black-Scholes-Modell weist folgende Vorteile auf: zum einen wird nur die Diskretisierung der Zeitachse (und nicht des Zustandsraumes) vorgenommen, zum anderen ist es das einzige Verfahren mit bekannten Fehlerabschätzungen. Kim [71] hat den Ansatz von Geske und Johnson weiterverfolgt und die Early-Exercise-Prämie-Darstellung für den Preis einer amerikanischen Put-Option erhalten. Die vorliegende Arbeit wird grundsätzlich an die Ideen dieser beiden Arbeiten anknüpfen, um das Studium von

n -Bermuda-Put-Optionen (eine Put-Option mit n -Ausübungsmöglichkeiten) im Black-Scholes-Modell voranzutreiben, mit dem Ziel weitere Erkenntnisse über amerikanische Put-Optionen, als Grenzfall ($n \rightarrow \infty$) von n -Bermuda-Put-Optionen, zu erhalten. Unsere Hauptaufgabe wird zunächst darin bestehen alle fehlenden Beweise, sowohl für die Preisformel, als auch für die partiellen Ableitungen aus der Arbeit von Geske und Johnson [41] zu erbringen; den nicht weiter spezifizierten Fehlerterm, bezeichnet als $\mathcal{O}(n\Delta t)$, von Kim [71] zu beschreiben und auf die Konvergenz gegen null zu untersuchen. Weiterhin werden wir die Eigenschaften des kritischen Randes einer n -Bermuda-Put-Option, wie beispielsweise Existenz, Eindeutigkeit, Monotonie, Homogenität usw. herleiten und studieren. Ausgehend von der Abschätzung von Carverhill und Webber [21] für die Differenz der Preise einer amerikanischen und einer n -Bermuda-Put-Option werden wir Abschätzungen für die Differenz der kritischen Ränder beider Optionstypen erhalten. Das Augenmerk wird dabei auf die Herleitung von exakten Abschätzungen (d.h. mit bekannten Konstanten) gelegt, um diese später für numerische Berechnungen der Preise anwenden zu können.

Die Gliederung der vorliegenden Arbeit ist wie folgt. Im ersten Kapitel wird eine n -Bermuda-Put-Option definiert und deren Preis als diskontierter Erwartungswert aller zukünftigen Auszahlungen dargestellt. Diese Darstellung führt zu einer einfachen Herleitung der analytischen Preisformel einer n -Bermuda-Put-Option. Weiter werden wir sehen, dass mit einer wachsenden Anzahl an Ausübungsmöglichkeiten der Preis einer n -Bermuda-Put-Option sich dem Preis einer amerikanischen Put-Option annähert. Im nächsten Schritt wird die Konvergenz der kritischen Ränder untersucht und eine Abschätzung mit einer exakten Angabe aller auftretenden Konstanten gewonnen. Außerdem werden wir die Ordnung für die Differenz der benachbarten kritischen Preise einer n -Bermuda-Put-Option analysieren. Weiterhin wird der Preis einer n -Bermuda-Put-Option als der Preis einer europäischen Put-Option zuzüglich einer Prämie (EE-Prämie) dargestellt und somit ein Analogon zur stetigen Early-Exercise-Prämie-Darstellung gewonnen. Die EE-Prämie wird in einen gegen amerikanische EE-Prämie konvergenten Teil und einen mit wachsendem n verschwindenden Term, den Fehlerterm R_n zerlegt. Eine Abschätzung für den Fehlerterm wird vorgeschlagen. Zuletzt wird ein approximativer Preis einer n -Bermuda-Put-Option, bezeichnet mit \hat{P}_n , eingeführt und seine Eigenschaften untersucht. Darüber hinaus werden wir sehen, dass zu einer approximativen Berechnung des Preises einer amerikanischen Put-Option in der Nähe der Fälligkeit keine genaue Approximation des kritischen Randes erforderlich ist.

Das zweite Kapitel wird sich hauptsächlich mit dem Thema partielle Ableitungen einer n -Bermuda-Put-Option, den sogenannten Sensitivitäten, beschäftigen. Es werden alle wesentlichen und für Hedging-Zwecke relevanten Sensitivitätsgrößen berechnet. Anschließend wird auf das Vorzeichen und die Abhängigkeiten zwischen den partiellen Ableitungen eingegangen. Eine neue Homogenitätseigenschaft für n -Bermuda-Put-Optionen und nachher auch für amerikanische Put-Optionen wird sowohl mit Hilfe der partiellen Ableitungen, als auch direkt hergeleitet. Außerdem werden einige Behauptungen aus der Arbeit von Geske und Johnson [41] auf ihre Richtigkeit überprüft.

Im dritten Kapitel werden zunächst die im ersten Kapitel der besseren Übersicht wegen vorausgesetzte und nicht bewiesene Eigenschaften des kritischen Randes: Existenz und Eindeutigkeit, sowie die Monotonie nachgewiesen. Weiterhin wird der kritische Rand einer n -Bermuda-Put-Option auf weitere Eigenschaften, wie z.B. Homogenität oder Invarianz bezüglich einiger Variablentransformationen untersucht. Durch den Grenzübergang werden diese Eigenschaften auf kritische Ränder amerikanischer Put-Optionen übertragen.

Das abschließende Kapitel dieser Arbeit wird die numerische Berechnung des Preises einer n -Bermuda-Put-Option für kleine und große n behandeln. Die Güte der numerischen Methoden wird mit den Ergebnissen aus einem Benchmark-Modell verglichen. Die Rolle des Benchmark-Modells wird dabei, wie es in der Literatur üblich ist, vom Binomialmodell übernommen. Daher wird zunächst das Binomialmodell und die Bewertung in diesem kurz beschrieben. Darüber hinaus wird der kritische Rand einer amerikanischen Put-Option im Binomialmodell eingeführt und auf die Existenz und Eindeutigkeit untersucht. Eine hinreichende Bedingung für die Existenz des kritischen Randes im Binomialmodell wird vorgeschlagen. Folgend den Ideen von Kim und Byun [72] wird ein Algorithmus zur Bewertung amerikanischer Put-Optionen entwickelt, der die Kenntnis über den kritischen Rand in jedem Berechnungsschritt berücksichtigt. Der zweite Abschnitt des Kapitels wird sich mit der numerischen Berechnung des Preises einer n -Bermuda-Put-Option im Black-Scholes-Modell beschäftigen. Dabei wird es sich zunächst um die Berechnung der Preise von Bermuda-Optionen für kleine n handeln (direkte Berechnung). Es wird gezeigt, wie der Berechnungsaufwand für die Geske-Johnson-Formel reduziert werden kann. Die multivariaten Normalverteilungen in der Formel werden auf einen Spezialfall des Algorithmus von Genz [37] (ein Algorithmus zur Berechnung multivariater Normalverteilungen) reduziert. Zur Bewertung amerikanischer Put-Optionen werden Approximationsmethoden basierend auf der EEP-Darstellung einer n -Bermuda-Put-Option entwickelt. Ein Abbruchkriterium nach Erreichen der vorgegebenen Genauigkeit wird vorgeschlagen, so dass die Preise amerikanischer Put-Optionen beliebig genau berechnet werden können. Die Robustheit aller Algorithmen wird an einem großen Sample von Parametern getestet. Zum Abschluss werden wir einen Zwei-Schritt-Algorithmus zur Berechnung der Preise amerikanischer Put-Optionen entwickeln, welcher aus unserer Sicht auch für andere verwandte Problemstellungen von Interesse sein könnte.

1. n -Bermuda-Put-Option nach Geske und Johnson

In diesem Kapitel wollen wir den Ansatz von Geske und Johnson [41] präsentieren und eine analytische Preisformel für eine n -Bermuda-Put-Option, genauer eine Put-Option mit n -Ausübungsmöglichkeiten, herleiten. Die Formel selbst wurde von Geske und Johnson im Jahre 1984 ohne Beweis angegeben. Erst in der Arbeit von Prékopa und Szántai [97], die vor wenigen Jahren veröffentlicht wurde, kann ein vollständiger Beweis gefunden werden. Allerdings haben hier die Autoren zwar die Richtigkeit der Formel mit Hilfe eines Induktionsbeweises nachgewiesen, verwendeten jedoch rechenaufwendige Methoden, die unter anderem einen sicheren Umgang mit mehrdimensionalen Verteilungsfunktionen der Normalverteilung erfordern. Wir möchten hier deshalb einen weiteren Beweis präsentieren, der im Vergleich zum Beweis von Prékopa und Szántai [97] kürzer und einfacher in der Handhabung ist. Die in unserem Beweis verwendete Darstellung des Preises einer Bermuda-Put-Option sorgt für ein besseres intuitives Verständnis dieser und wird für uns im weiteren Verlauf der Arbeit von Nutzen sein.

Im zweiten Abschnitt dieses Kapitels werden wir sehen, dass mit wachsender Anzahl an Ausübungszeitpunkten der Preis einer n -Bermuda-Put-Option sich dem Preis einer amerikanischen Put-Option annähert. Vielmehr wird es sogar möglich sein eine explizite Fehlerabschätzung anzugeben. Mit Hilfe dieser Abschätzung und mit einer ähnlichen Vorgehensweise wie in [76], [79] wird anschließend die Konvergenzordnung der kritischen Ränder von n -Bermuda-Put-Option und amerikanischer Put-Option untersucht.

Im letzten Abschnitt des Kapitels geht es vor allem darum den Preis einer n -Bermuda-Put-Option als den Preis einer europäischen Put-Option zuzüglich einer positiven Prämie (Early-Exercise-Prämie) darzustellen. Diese Darstellung trägt nicht nur zu einem intuitiven Verständnis bei, sondern ermöglicht uns unter anderem auch einen Zugang zur approximativen Berechnung des Preises einer n -Bermuda-Put-Option für große n .

Bevor wir uns mit der Herleitung der Geske-Johnson-Formel befassen, beschreiben wir zunächst das zugrundeliegende Finanzmarktmodell, das in dieser Arbeit unterstellt und für den Rest der Arbeit gelten wird.

1.1. Finanzmarktmodell

Unser Finanzmarktmodell entspricht dem Black-Scholes-Modell (vgl. [10]) mit einem endlichen Zeithorizont $T > 0$. Hier gibt es zwei Anlagearten: sichere Anlage und riskante Anlage. Die Preisentwicklungen beider Anlagearten sind wie folgt gegeben:

- Sichere Anlageart (risikoloser Bond)

$$dB_t = rB_t dt, \quad B_0 = 1, \quad t \in [0, T], \quad (1.1)$$

mit einem konstanten Zins $r \geq 0$.

- Riskante Anlageart (Aktie)

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad S_0 > 0, \quad t \in [0, T], \quad (1.2)$$

mit den konstanten Parametern μ -Drift und σ -Volatilität und mit W_t für die standardisierte Brownsche Bewegung, definiert auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Der Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ist mit der von der Brownschen Bewegung W_t generierten Filtration $\mathbb{F} := (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$, die den üblichen Bedingungen¹ genügt, versehen.

Weitere Annahmen in diesem Modell sind:

Annahmen 1.1. Im Modell gibt es keine Dividendenzahlungen, keine Steuer und keine Transaktionskosten. Weiterhin sei eine beliebige Stückelung der Wertpapiere möglich.

In dem Black-Scholes-Modell existiert ein eindeutiges Martingalmaß \mathbb{P}^* , unter welchem der diskontierte Aktienprozess $S_t e^{-rt}$ ein Martingal ist (siehe z.B. [60], [92]). Die Preisdynamik für die Aktie unter diesem Maß \mathbb{P}^* ist gegeben durch

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (1.3)$$

bzw. als Lösung

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right\}, \quad (1.4)$$

wobei W_t hier die standardisierte Brownsche Bewegung unter dem Maß \mathbb{P}^* ist.

Da im Weiteren nur die Preisbildung von Interesse ist, halten wir für den Rest der Arbeit den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}^*)$ mit der von der geometrischen Brownschen Bewegung aus (1.4) generierten Filtration $\mathbb{F} := (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ mit den üblichen Bedingungen fest.

¹a) Die Filtration \mathbb{F} ist rechtsstetig, d.h. $\mathcal{F}_t = \bigcap_{u>t} \mathcal{F}_u$ für jedes $t < T$; b) \mathcal{F}_0 enthält alle \mathbb{P} -Nullmengen, d.h. wenn $B \subset A \in \mathcal{F}_0$ und $\mathbb{P}(A) = 0$, dann ist $B \in \mathcal{F}_0$.

1.2. Preis einer n -Bermuda-Put-Option

In diesem Abschnitt gehen wir auf die analytische Darstellung des Preises einer n -Bermuda-Put-Option, sowie auf die Definition des kritischen Preises ein. Die Existenz und Eindeutigkeit der kritischen Preise werden in diesem Abschnitt als gegeben betrachtet und erst im nächsten Kapitel mit Hilfe der partiellen Ableitung des Optionspreises nach dem Aktienkurs bewiesen.

Definition 1.2. Eine europäische Put-Option ist ein Kontrakt, der dem Käufer dieses Kontraktes das Recht einräumt, zu einem vorab vereinbarten Preis K (Ausübungspreis) und zu einem Zeitpunkt T (Ausübungszeitpunkt) ein Basisgut zu verkaufen.

Definition 1.3. Eine amerikanische Put-Option ist ein Kontrakt, der dem Käufer dieses Kontraktes das Recht einräumt, zu einem vorab vereinbarten Preis K und jeder Zeit bis zu einem Zeitpunkt T (letzter Ausübungszeitpunkt) ein Basisgut zu verkaufen.

Definition 1.4. Eine n -Bermuda-Put-Option ist ein Kontrakt, der dem Käufer dieses Kontraktes das Recht einräumt, zu einem vorab vereinbarten Preis K und zu den festen Zeitpunkten $0 < t_1 < \dots < t_n = T$ ein Basisgut zu verkaufen.

Bemerkung 1.5. Europäische und amerikanische Put-Optionen sind als Grenzfälle einer n -Bermuda-Put-Option zu betrachten, denn im Falle $n = 1$ ist 1-Bermuda-Put-Option eine europäische Put-Option und im Falle $n \rightarrow \infty$ stellt sie, wie wir später sehen werden, eine amerikanische Put-Option dar. Diese Verallgemeinerungseigenschaft weckt großes Interesse an dem Studium der Eigenschaften von n -Bermuda-Put-Optionen.

Wir widmen uns zunächst der Frage der Bewertung von Bermuda-Optionen. Dazu sei eine Zerlegung $\mathcal{Z}_n := \{0 = t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \dots, t_n^{(n)} = T\}$ des Intervalls $[0, T]$ gegeben¹. Eine n -Bermuda-Put-Option ist nach Definition 1.4 eine Put-Option mit den Ausübungsmöglichkeiten $t_1^{(n)}, \dots, t_n^{(n)}$. Der Preis einer n -Bermuda-Put-Option bezeichnen wir mit $P_n^{(n)}(S, K, T)$, wobei S den aktuellen Aktienkurs, K den Ausübungspreis, T die Restlaufzeit und der untere Index \cdot_n die Anzahl der Ausübungsmöglichkeiten bezeichnen. Der obere Index $\cdot^{(n)}$ deutet auf die Zerlegung \mathcal{Z}_n hin. Falls die Zerlegung fixiert oder es aus dem Kontext ersichtlich ist um welche Zerlegung es sich handelt, lassen wir den Index stets weg.

Der Käufer einer n -Bermuda-Put-Option wird zu jedem Zeitpunkt $t \in \{t_1, \dots, t_n\}$ genau dann Gebrauch von seinem Recht machen, also die Option ausüben, wenn sie noch nicht ausgeübt ist und wenn der Ausübungspreis $(K - S_t)^+$ größer oder zumindest gleich dem Optionswert selbst ist (vgl. [41]). Der letzte Fall impliziert die Existenz eines „kritischen“ Preises S_t^* , bei dem der Besitzer der Option indifferent zwischen der Ausübung und der nicht Ausübung der Option ist.

¹Geske und Johnson haben in [41] eine äquidistante Zerlegung $t_i^{(n)} := iT/n$, $i = 1, \dots, n$ vorgeschlagen.

Definition 1.6. Der kritische Preis $S_{i,(n)}^*$ zur Zeit $t_i^{(n)}$ ist die (eindeutige) Lösung der Gleichung

$$P_{n-i}^{(n)}(S_{i,(n)}^*, K, T_i^{(n)}) = \left(K - S_{i,(n)}^*\right)^+, \quad (1.5)$$

mit der Restlaufzeit $T_i^{(n)} := T - t_i^{(n)}$ und dem Preis einer $(n - i)$ -Bermuda-Put-Option $P_{n-i}^{(n)}$ zur Zeit $t_i^{(n)}$ zur Zerlegung \mathcal{Z}_n .

Die Folge $S_{(n)}^* := (S_{i,(n)}^*)_{i=0,\dots,n}$ von kritischen Preisen bezeichnen wir als kritischen Rand zur Zerlegung \mathcal{Z}_n .

Bemerkung 1.7. Zu jeder Zeit $t \in \{t_1^{(n)}, \dots, t_n^{(n)}\}$ existiert genau ein kritischer Preis $S_{t,(n)}^*$. Weiterhin gilt $0 \leq S_{1,(n)}^* \leq S_{2,(n)}^* \leq \dots \leq S_{n,(n)}^* = K$. Diese, sowie weitere Eigenschaften des kritischen Randes, werden in folgenden Kapiteln hergeleitet. Der besseren Übersicht wegen lassen wir ab hier die oberen $\cdot^{(n)}$ bzw. die unteren $\cdot_{(n)}$ Indizes weg und schreiben lediglich S_i^* für den kritischen Preis (zur Zeit t_i) einer n -Bermuda-Put-Option.

Mit Methoden der *Dynamischen Programmierung* kann der Preis einer n -Bermuda-Put-Option wie folgt rekursiv berechnet werden.

Satz 1.8. Für n und $i = 1, \dots, n - 1$ definiere

$$V_n(S) = (K - S)^+ \quad (1.6)$$

$$V_i(S) = \max \left\{ (K - S)^+ ; e^{-r\Delta t_{i+1}} \mathbb{E}^* \left[V_{i+1} \left(S e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t_{i+1} + \sigma\sqrt{\Delta t_{i+1}}Y} \right) \right] \right\} \quad (1.7)$$

und

$$V_0(S) = e^{-r\Delta t_1} \mathbb{E}^* \left[V_1 \left(S e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t_1 + \sigma\sqrt{\Delta t_1}Y} \right) \right], \quad (1.8)$$

wobei $Y \sim N(0, 1)$ eine standardnormalverteilte Zufallsvariable und $\Delta t_{i+1} := t_{i+1} - t_i$ sind. Der Preis einer n -Bermuda-Put-Option P_n entspricht genau V_0 , also $P_n = V_0$ ¹.

Wie oben bereits angemerkt wurde, haben Prékopa und Szántai in ihrer Arbeit [97] die Größe V_0 analytisch berechnet. Wir wollen dies hier auch tun, allerdings auf eine andere Weise. Zunächst charakterisieren wir den Preis einer n -Bermuda-Put-Option als den diskontierten Erwartungswert aller künftigen Auszahlungen. Diese Darstellung ähnelt der von Iwaki et al. [55]. Im zweiten Schritt wird dieser Erwartungswert analytisch bestimmt.

¹Der Beweis dazu kann z.B. in [78] oder [96] gefunden werden.

Satz 1.9. *Der Preis einer n -Bermuda-Put-Option ist gegeben durch*

$$P_n^{(n)}(S, K, T) = \sum_{k=1}^n e^{-rt_k} \mathbb{E}^* \left[(K - S_k) \mathbb{1}_{\{S_1 > S_1^*, \dots, S_{k-1} > S_{k-1}^*, S_k \leq S_k^*\}} \mid S_0 = S \right], \quad (1.9)$$

wobei S_i der Aktienpreis und S_i^* der kritische Preis zur Zeit t_i sind.

Beweis. Wir nehmen an, dass S_{n-1}^* existiert, so dass gilt¹

$$\begin{aligned} P_1^{(n)}(S, K, T_{n-1}) &< K - S & \text{falls } S < S_{n-1}^* \\ P_1^{(n)}(S, K, T_{n-1}) &> K - S & \text{falls } S > S_{n-1}^* \\ P_1^{(n)}(S, K, T_{n-1}) &= K - S & \text{falls } S = S_{n-1}^*. \end{aligned}$$

Dann folgt für den Preis einer 2-Bermuda-Put-Option zur Zeit t_{n-2} mit den Ausübungsmöglichkeiten in t_{n-1} und t_n

$$\begin{aligned} P_2^{(n)}(S_{n-2}, K, T_{n-2}) &= e^{-r(t_{n-1}-t_{n-2})} \mathbb{E}^* \left[(K - S_{n-1}) \mathbb{1}_{\{S_{n-1} \leq S_{n-1}^*\}} \mid S_{n-2} \right] \\ &\quad + e^{-r(t_n-t_{n-2})} \mathbb{E}^* \left[P_1(S_{n-1}, K, T_{n-1}) \mathbb{1}_{\{S_{n-1} > S_{n-1}^*\}} \mid S_{n-2} \right] \\ &= e^{-r(t_{n-1}-t_{n-2})} \mathbb{E}^* \left[(K - S_{n-1}) \mathbb{1}_{\{S_{n-1} \leq S_{n-1}^*\}} \mid S_{n-2} \right] \\ &\quad + e^{-r(t_n-t_{n-2})} \mathbb{E}^* \left[(K - S_n) \mathbb{1}_{\{S_{n-1} > S_{n-1}^*, S_n \leq S_n^*\}} \mid S_{n-2} \right], \end{aligned}$$

wobei, wie bereits oben erwähnt, $S_n^* = K$ ist. Die Fortsetzung dieser Argumentation bis $t_0 = 0$ führt dann zur Formel (1.9). □

Bemerkung 1.10. Der Preis einer n -Bermuda-Put-Option in Formel (1.9) ist als diskontierter Erwartungswert aller zukünftigen Auszahlungen dargestellt. Diese Darstellung ist um einiges intuitiver im Vergleich zur Darstellung in Formel (1.8). Ein weiterer Vorteil von Formel (1.9) eröffnet sich in der analytischen Handhabung. Dazu der nächste Satz.

¹Sowohl die Existenz von S_{n-i}^* , als auch die Monotonie von $P_i^{(n)}(S, K, T_{n-i})$ in S wird in Kapiteln 2 und 3 (vgl. Sätze 2.16 und 3.1) bewiesen.

Satz 1.11. *Der Erwartungswert in (1.9) kann analytisch berechnet werden. Für den Preis einer n -Bermuda-Put-Option gilt somit*

$$P_n^{(n)}(S, K, T) = K \sum_{k=1}^n e^{-rt_k} N_k(\mathbf{b}_{1k}; \mathbf{R}_{1k}) - S \sum_{k=1}^n N_k(\mathbf{a}_{1k}; \mathbf{R}_{1k}), \quad (1.10)$$

mit

$$b_i := \frac{\log \frac{S}{S_i^*} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) t_i}{\sigma \sqrt{t_i}} \quad \text{und} \quad a_i := b_i + \sigma \sqrt{t_i}, \quad (1.11)$$

$$\mathbf{b}_{1k} := (b_1, \dots, b_{k-1}, -b_k), \quad (1.12)$$

$$\mathbf{a}_{1k} := (a_1, \dots, a_{k-1}, -a_k), \quad (1.13)$$

$$\mathbf{R}_{1k} := \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{\frac{t_1}{t_2}} & \cdots & \sqrt{\frac{t_1}{t_{k-1}}} & -\sqrt{\frac{t_1}{t_k}} \\ \sqrt{\frac{t_1}{t_2}} & 1 & \cdots & \sqrt{\frac{t_2}{t_{k-1}}} & -\sqrt{\frac{t_2}{t_k}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \sqrt{\frac{t_1}{t_{k-1}}} & \sqrt{\frac{t_2}{t_{k-1}}} & \cdots & 1 & -\sqrt{\frac{t_{k-1}}{t_k}} \\ -\sqrt{\frac{t_1}{t_k}} & -\sqrt{\frac{t_2}{t_k}} & \cdots & -\sqrt{\frac{t_{k-1}}{t_k}} & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.14)$$

wobei N_k die k -dimensionale Normalverteilungsfunktion mit dem Mittelwert $\mathbf{0}$ und der Kovarianzmatrix (Korrelationsmatrix) \mathbf{R}_{1k} bezeichnet.

Beweis. Nach Satz 1.9 gilt

$$P_n^{(n)}(S, K, T) = \sum_{k=1}^n e^{-rt_k} \mathbb{E}^* \left[(K - S_k) \mathbb{1}_{\{S_1 > S_1^*, \dots, S_{k-1} > S_{k-1}^*, S_k \leq S_k^*\}} \mid S_0 = S \right].$$

Der k -te Summand ist

$$\begin{aligned} e^{-rt_k} \mathbb{E}^* \left[(K - S_k) \mathbb{1}_{\{S_1 > S_1^*, \dots, S_{k-1} > S_{k-1}^*, S_k \leq S_k^*\}} \mid S_0 = S \right] &= \\ &= e^{-rt_k} K \underbrace{\mathbb{E}^* \left[\mathbb{1}_{\{S_1 > S_1^*, \dots, S_{k-1} > S_{k-1}^*, S_k \leq S_k^*\}} \mid S_0 = S \right]}_{:= \Theta_1} \\ &\quad - e^{-rt_k} \underbrace{\mathbb{E}^* \left[S_k \mathbb{1}_{\{S_1 > S_1^*, \dots, S_{k-1} > S_{k-1}^*, S_k \leq S_k^*\}} \mid S_0 = S \right]}_{:= \Theta_2}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Wir widmen uns zunächst dem ersten Term Θ_1 . Es gilt

$$\begin{aligned}\Theta_1 &= \mathbb{E}^* \left[\mathbb{1}_{\{S_1 > S_1^*, \dots, S_{k-1} > S_{k-1}^*, S_k \leq S_k^*\}} \mid S_0 = S \right] \\ &= \mathbb{P}^* (S_1 > S_1^*, \dots, S_{k-1} > S_{k-1}^*, S_k \leq S_k^*).\end{aligned}$$

Weiterhin transformieren wir die Variablen S_i wie folgt

$$\tilde{S}_i := \frac{\log \frac{S_i}{S_0} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) t_i}{\sigma \sqrt{t_i}}, \quad i = 1, \dots, k. \quad (1.16)$$

Dabei gilt $\tilde{S}_i \sim N(0, 1)$ und für $i < j$

$$\text{Cov} [\pm \tilde{S}_i, \pm \tilde{S}_j] = \frac{1}{\sigma^2 \sqrt{t_i} \sqrt{t_j}} \text{Cov} \left[\pm \log \frac{S_i}{S_0}, \pm \log \frac{S_j}{S_0} \right] = \frac{\sigma^2 t_i}{\sigma^2 \sqrt{t_i} \sqrt{t_j}} = \sqrt{\frac{t_i}{t_j}} \quad (1.17)$$

bzw.

$$\text{Cov} [\pm \tilde{S}_i, \mp \tilde{S}_j] = \frac{1}{\sigma^2 \sqrt{t_i} \sqrt{t_j}} \text{Cov} \left[\pm \log \frac{S_i}{S_0}, \mp \log \frac{S_j}{S_0} \right] = -\frac{\sigma^2 t_i}{\sigma^2 \sqrt{t_i} \sqrt{t_j}} = -\sqrt{\frac{t_i}{t_j}}. \quad (1.18)$$

Insgesamt gilt für den ersten Term

$$\begin{aligned}\Theta_1 &= \mathbb{P}^* (S_1 > S_1^*, \dots, S_{k-1} > S_{k-1}^*, S_k \leq S_k^*) \\ &= \mathbb{P}^* (\tilde{S}_1 > -b_1, \dots, \tilde{S}_{k-1} > -b_{k-1}, \tilde{S}_k \leq -b_k) \\ &= \mathbb{P}^* (-\tilde{S}_1 < b_1, \dots, -\tilde{S}_{k-1} < b_{k-1}, \tilde{S}_k \leq -b_k) = N_k(\mathbf{b}_{1k}; \mathbf{R}_{1k}).\end{aligned}$$

Als Nächstes betrachten wir den zweiten Term Θ_2 in (1.15). Der einzige Unterschied gegenüber der Berechnung des Erwartungswertes des ersten Terms Θ_1 liegt in der Zufallsvariable S_k , die vor der Indikatorfunktion steht. Der Trick hier besteht in der Eliminierung dieser Variable durch einen Maßwechsel. Dazu definieren wir ein neues Maß $\tilde{\mathbb{P}}$ durch die Radon-Nikodým-Ableitung

$$\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}^*} = \frac{S_k}{\mathbb{E}^*[S_k]} = \frac{S_k}{S_0 e^{rt_k}} = \exp \left\{ -\frac{\sigma^2}{2} t_k + \sigma W(t_k) \right\}. \quad (1.19)$$

Mit dem Satz von Girsanov kann dann gefolgert werden, dass

$$\tilde{W}(t) = W(t) - \sigma t \quad \text{für } 0 \leq t \leq t_k \quad (1.20)$$

eine standardisierte Brownsche Bewegung unter dem neuen Maß $\tilde{\mathbb{P}}$ ist. Die Preisdynamik von S_t unter dem neuen Maß ist dann wie folgt gegeben

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma \tilde{W}(t) \right\}, \quad 0 \leq t \leq t_k. \quad (1.21)$$

Somit gilt unter $\tilde{\mathbb{P}}$

$$\log \frac{S_t}{S_0} \sim N \left(\left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) t, \sigma^2 t \right), \quad 0 \leq t \leq t_k. \quad (1.22)$$

Damit ergibt sich für den zweiten Term Θ_2

$$\begin{aligned} \Theta_2 &= S_0 e^{rt_k} \mathbb{E}^* \left[\frac{S_k}{S_0 e^{rt_k}} \mathbb{1}_{\{S_1 > S_1^*, \dots, S_{k-1} > S_{k-1}^*, S_k \leq S_k^*\}} \mid S_0 = S \right] \\ &= S e^{rt_k} \tilde{\mathbb{E}} \left[\mathbb{1}_{\{S_1 > S_1^*, \dots, S_{k-1} > S_{k-1}^*, S_k \leq S_k^*\}} \mid S_0 = S \right] \\ &= S e^{rt_k} \tilde{\mathbb{P}} (S_1 > S_1^*, \dots, S_{k-1} > S_{k-1}^*, S_k \leq S_k^*). \end{aligned}$$

Mit der gleichen Argumentation wie oben gilt

$$\Theta_2 = S e^{rt_k} N_k(\mathbf{a}_{1k}; \mathbf{R}_{1k}) \quad (1.23)$$

und somit insgesamt für den k -ten Summand (1.15)

$$e^{-rt_k} K N_k(\mathbf{b}_{1k}; \mathbf{R}_{1k}) - S N_k(\mathbf{a}_{1k}; \mathbf{R}_{1k}). \quad (1.24)$$

Das Summieren von $k = 1$ bis n liefert schließlich die Behauptung. \square

Bemerkung. Da es sich um den Zeitpunkt zur Zeit $t_0 = 0$ gehandelt hat, konnte dieser bei der Berechnung des Preises bisher weggelassen werden. Die nachfolgende Feststellung formuliert diesen Sachverhalt allgemeiner.

Feststellung 1.12. Der Preis einer $(n - i)$ -Bermuda-Put-Option mit den Ausübungsmöglichkeiten in t_{i+1}, \dots, t_n und der Dauer $T_i := T - t_i$ beträgt zur Zeit t_i

$$P_{n-i}^{(n)}(S_i, K, T_i) = K \sum_{k=i+1}^n e^{-r(t_k - t_i)} N_{k-i}(\mathbf{b}_{i+1,k}; \mathbf{R}_{i+1,k}) - S_i \sum_{k=i+1}^n N_{k-i}(\mathbf{a}_{i+1,k}; \mathbf{R}_{i+1,k}), \quad (1.25)$$

mit

$$b_j^i := \frac{\log \frac{S_i}{S_j^*} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t_j - t_i)}{\sigma \sqrt{t_j - t_i}} \quad \text{und} \quad a_j^i := b_j^i + \sigma \sqrt{t_j - t_i}, \quad (1.26)$$

$$\mathbf{b}_{i+1,k} := (b_{i+1}^i, \dots, b_{k-1}^i, -b_k^i), \quad (1.27)$$

$$\mathbf{a}_{i+1,k} := (a_{i+1}^i, \dots, a_{k-1}^i, -a_k^i), \quad (1.28)$$

und

$$\mathbf{R}_{i+1,k} := \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{\frac{t_{i+1}-t_i}{t_{i+2}-t_i}} & \cdots & \sqrt{\frac{t_{i+1}-t_i}{t_{k-1}-t_i}} & -\sqrt{\frac{t_{i+1}-t_i}{t_k-t_i}} \\ \sqrt{\frac{t_{i+1}-t_i}{t_{i+2}-t_i}} & 1 & \cdots & \sqrt{\frac{t_{i+2}-t_i}{t_{k-1}-t_i}} & -\sqrt{\frac{t_{i+2}-t_i}{t_k-t_i}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \sqrt{\frac{t_{i+1}-t_i}{t_{k-1}-t_i}} & \sqrt{\frac{t_{i+2}-t_i}{t_{k-1}-t_i}} & \cdots & 1 & -\sqrt{\frac{t_{k-1}-t_i}{t_k-t_i}} \\ -\sqrt{\frac{t_{i+1}-t_i}{t_k-t_i}} & -\sqrt{\frac{t_{i+2}-t_i}{t_k-t_i}} & \cdots & -\sqrt{\frac{t_{k-1}-t_i}{t_k-t_i}} & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.29)$$

Bemerkung. Der Zeitpunkt t zu welchem wir den Preis einer Bermuda Option berechnen wollen, muss nicht notwendigerweise einem der Ausübungszeitpunkte entsprechen. Falls $t \in [t_i, t_{i+1})$ ist, so ist in den oberen Formeln (1.25) bis (1.29) der Punkt t_i überall durch t zu ersetzen.

Lemma 1.13 (Homogenität in der Zeit). *Es seien $\mathcal{Z}_n = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ eine Zerlegung des Intervalls $[0, T]$ und $\tilde{\mathcal{Z}}_n = \{\tilde{t}_0, \tilde{t}_1, \dots, \tilde{t}_n\}$ eine Zerlegung des Intervalls $[t, t+T]$ mit $\Delta t_i = \Delta \tilde{t}_i$, $i = 1, \dots, n$ gegeben. Dann gilt*

$$P_n(S, K, 0, T; \mathcal{Z}_n) = P_n(S, K, t, t+T; \tilde{\mathcal{Z}}_n). \quad (1.30)$$

Beweis. Für alle $i = 1, \dots, n$ stimmen sowohl die Restlaufzeiten T_i und \tilde{T}_i , als auch die übrigen Parameter überein. Die Behauptung folgt somit aus der Definition der n -Bermuda-Put-Option. □

Lemma 1.14 (Obere und untere Schranke). *Für eine n -Bermuda-Put-Option können folgende Schranken angegeben werden*

$$\left(K^{-r(t_1-t_0)} - S\right)^+ \leq P_n(S, K, T) \leq K^{-r(t_1-t_0)}. \quad (1.31)$$

Beweis. Für $S = 0$ ist der Preis einer n -Bermuda-Put-Option, wie aus der Definition ersichtlich, gleich $K^{-r(t_1-t_0)}$. Die Behauptung folgt aus $-1 \leq \frac{\partial P_n}{\partial S} \leq 0$ (vgl. (2.24) im nächsten Kapitel). □

Bemerkung 1.15. Aus dem Beweis von Satz 1.11 folgt

$$\sum_{k=1}^n N_k(\mathbf{a}_{1k}; \mathbf{R}_{1k}) = \sum_{k=1}^n \tilde{\mathbb{P}}(S_1 > S_1^*, \dots, S_{k-1} > S_{k-1}^*, S_k \leq S_k^*),$$

mit

$$S_i = S_0 \exp \left\{ \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) t_i + \sigma W_{t_i} \right\}$$

unter dem Maß $\tilde{\mathbb{P}}$.

Die Ereignisse $\{S_1 \leq S_1^*\}, \dots, \{S_1 > S_1^*, \dots, S_{n-1} > S_{n-1}^*, S_n \leq S_n^*\}$ sind disjunkt und es gilt

$$\begin{aligned} \{S_1 \leq S_1^*\} \cup \{S_1 > S_1^*, S_2 \leq S_2^*\} \cup \dots \cup \{S_1 > S_1^*, \dots, S_{n-1} > S_{n-1}^*, S_n \leq S_n^*\} \\ \cup \{S_1 > S_1^*, \dots, S_{n-1} > S_{n-1}^*, S_n > S_n^*\} = \Omega. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\sum_{k=1}^n \tilde{\mathbb{P}}(S_1 > S_1^*, \dots, S_{k-1} > S_{k-1}^*, S_k \leq S_k^*) = 1 - \tilde{\mathbb{P}}(S_1 > S_1^*, \dots, S_n > S_n^*). \quad (1.32)$$

Das bedeutet, dass die zweite Summe in der Geske-Johnson-Formel (1.10) durch eine einzige n -dimensionale Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ersetzt werden kann.

Beispiel 1.16. Es seien der Aktienkurs $S = 100$, der Ausübungspreis $K = 110$, die Volatilität $\sigma = 0.2$, der Zinssatz $r = 0.04$ und die Gesamtlaufzeit $T = 4$.¹ Wir wollen eine 2-Bermuda-Put-Option mit den Ausübungszeitpunkten in $t_1 := T/2$ und $t_2 := T$ nach der Geske-Johnson-Formel bewerten. Nach Satz 1.11 gilt

$$\begin{aligned} P_2^{(2)}(S, K, T) &= K e^{-rt_1} N(-b_1) - S N(-a_1) \\ &\quad + K e^{-rt_2} N_2((b_1, -b_2); R_{12}) - S N_2((a_1, -a_2); R_{12}) \end{aligned}$$

mit

$$b_i := \frac{\log \frac{S}{S_i^*} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t_i}{\sigma \sqrt{t_i}}, \quad a_i := b_i + \sigma \sqrt{t_i}, \quad \text{und} \quad R_{12} := \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{1/2} \\ -\sqrt{1/2} & 1 \end{pmatrix}.$$

¹Aus Anschaulichkeitsgründen in Abbildung 1.1 ist T absichtlich so groß gewählt.

1.2 Preis einer n -Bermuda-Put-Option

Die einzige verbleibende Unbekannte ist der kritische Preis S_1^* zur Zeit $t_1 = T/2$. Dieser wird rekursiv mit Hilfe der Gleichung (1.5) ermittelt. Der kritische Preis zur Zeit $t_1 = T/2$ ist also die eindeutige Lösung der Gleichung (für eine grafische Ausführung siehe Abbildung 1.1)

$$P_1^{(2)}(S_1^*, K, T - t_1) = (K - S_1^*)^+. \quad (1.33)$$

Die Größe $P_1^{(2)}$ ist dabei nichts anderes als der Preis einer europäischen Put-Option mit dem Ausübungspreis K und der Laufzeit $T/2$.

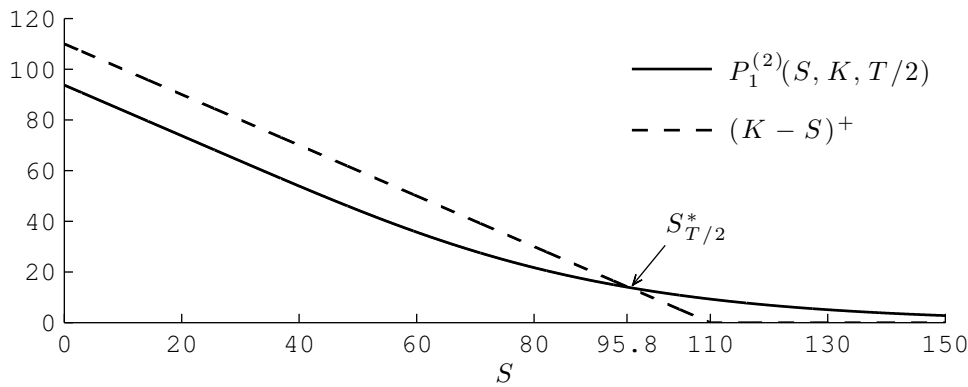


ABBILDUNG 1.1.: ERMITTLUNG DES KRITISCHEN PREISES AUS GLEICHUNG (1.33). DIE ÜBRIGEN PARAMETER SIND $K = 110$, $r = 0.04$, $\sigma = 0.2$, $T = 4$.

Für den kritischen Preis S_1^* gilt somit $S_1^* = 95.80$ und für den Preis der 2-Bermuda-Put-Option $P_2^{(2)}(S, K, T) = 14.18$. Im Vergleich dazu ist der Preis einer europäischen Put-Option mit identischen Parametern gleich $P_1^{(1)}(S, K, T) = 12.42$.

Bemerkung 1.17. Die Berechnung des Preises einer n -Bermuda-Put-Option nach der Geske-Johnson-Formel für große n ist leider einerseits wegen der n -dimensionalen Standardnormalverteilung und andererseits wegen der rekursiven Berechnung der kritischen Preise entweder eine große numerische Herausforderung oder gar nicht in absehbarer Zeit mit vorgegebener Genauigkeit möglich. Viel mehr haben sich Geske und Johnson [41] für einen der Grenzfälle der n -Bermuda-Put-Option interessiert, nämlich für die amerikanische Put-Option (der Fall $n \rightarrow \infty$), dessen Wert sie mit Hilfe der Extrapolationsmethoden angewandt auf die ersten Folgenglieder $P_1^{(1)}, P_2^{(2)}, P_3^{(3)}$ usw. ermittelt haben. Nach Geske und Johnson [41] gilt für den Preis einer amerikanischen Put-Option¹

¹Für die Berechnung der ersten n -Glieder der Folge $P_n^{(n)}$ bei der äquidistanten Zerlegungsfolge $\mathcal{Z}_n := \{T/n, 2T/n, \dots, nT/n\}$ sind insgesamt $n(n-1)/2$ kritische Preise $S_{i,(n)}^*, i = 1, \dots, n$ aus der impliziten Gleichung (1.5) zu bestimmen.

$$P^A \approx P_3^{(3)} + \frac{7}{2} \left(P_3^{(3)} - P_2^{(2)} \right) - \frac{1}{2} \left(P_2^{(2)} - P_1^{(1)} \right) \quad (1.34)$$

oder

$$P^A \approx P_4^{(4)} + \frac{29}{3} \left(P_4^{(4)} - P_3^{(3)} \right) - \frac{23}{6} \left(P_3^{(3)} - P_2^{(2)} \right) + \frac{1}{6} \left(P_2^{(2)} - P_1^{(1)} \right). \quad (1.35)$$

Bemerkung 1.18. Bis hierhin haben wir, sowie die Autoren Geske und Johnson [41], die n -Bermuda-Put-Optionen ohne eine sofortige Ausübung betrachtet. Der Preis einer n -Bermuda-Put-Option mit der Möglichkeit der sofortigen Ausübung ist gegeben durch

$$\hat{P}_n^{(n)}(S, K, T) := \max \left\{ K - S; P_n^{(n)}(S, K, T) \right\} \quad (1.36)$$

oder

$$\hat{P}_n^{(n)}(S, K, T) = (K - S) \mathbb{1}_{\{S \leq S_0^*\}} + P_n^{(n)}(S, K, T) \mathbb{1}_{\{S > S_0^*\}}. \quad (1.37)$$

Äquivalent dazu auch

$$\hat{P}_n^{(n)}(S, K, T) = \sum_{k=0}^n e^{-rt_k} \mathbb{E}^* \left[(K - S_k) \mathbb{1}_{\{S_0 > S_0^*, \dots, S_{k-1} > S_{k-1}^*, S_k \leq S_k^*\}} \mid S_0 = S \right]. \quad (1.38)$$

Im Falle $S_0 \leq S_0^*$ wird die Option $\hat{P}_n^{(n)}$, deren Wert $K - S_0$ beträgt, sofort ausgeübt und existiert danach nicht mehr. Für den Rest der Arbeit können wir daher ohne große Einschränkungen $S_0 > S_0^*$ annehmen, so dass die Preise $\hat{P}_n^{(n)}$ und $P_n^{(n)}$ übereinstimmen.

Bemerkung 1.19. Für eine Zerlegungsnullfolge \mathcal{Z}_n mit der Eigenschaft $\mathcal{Z}_i \subset \mathcal{Z}_j$ für $i < j$ gilt $P_n^{(n)} \leq P_{n+1}^{(n+1)}$. Aufgrund der Beschränktheit der Folge $P_n^{(n)}$ durch K nach oben, existiert ein Grenzwert P mit

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n^{(n)}.$$

Im nächsten Abschnitt zeigen wir, dass dieser Grenzwert P dem Preis einer amerikanischen Put-Option entspricht.

1.3. Konvergenz

In diesem Abschnitt werden wir sowohl auf die Konvergenz der Preise einer n -Bermuda-Put-Option gegen eine amerikanische Put-Option, als auch auf die Konvergenz der kritischen Ränder beider Optionstypen eingehen.

Konkret wird im ersten Unterabschnitt die Konvergenz des Preises einer n -Bermuda-Put-Option gegen den Preis einer amerikanischen Put-Option sichergestellt und eine Abschätzung mit einer genauen Angabe aller in dieser Abschätzung auftretenden Konstanten für die Differenz der Preise angegeben (vgl. [21]).

Im nächsten Teil des Abschnittes wird mit Hilfe dieser Abschätzung eine obere Schranke für die Differenz der kritischen Preise einer n -Bermuda-Put-Option und einer amerikanischen Put-Option hergeleitet. Darüber hinaus wird die Differenz zweier kritischer Preise auf dem kritischen Rand einer n -Bermuda-Put-Option nach oben abgeschätzt.

Zuletzt wird gezeigt, dass die Grenzwerte für beide Terme in der Geske-Johnson-Formel (1.10) existieren und es wird eine anschauliche, wahrscheinlichkeitstheoretische Interpretation für den Grenzwert des zweiten Terms der Formel vorgeschlagen.

1.3.1. Konvergenz der Preise

Wir gehen von unserem in Abschnitt 1.1 vorgestellten Finanzmarktmodell aus und bezeichnen mit $\mathcal{S}_{t,T}$ die Menge aller \mathbb{F} -Stoppzeiten τ mit Werten im Intervall $[t, T]$. Weiter definieren wir

$$\mathcal{S}_{t,T}(I) := \{\tau \in \mathcal{S}_{t,T} \mid \mathbb{P}(\tau \in I) = 1\}. \quad (1.39)$$

Satz 1.20. *Der Preis einer amerikanischen Put-Option ist gegeben durch¹*

$$P^A(S, K, T) = \sup_{\tau \in \mathcal{S}_{0,T}} \mathbb{E}^* [e^{-\tau r} (K - S_\tau)^+ \mid S_0 = S]. \quad (1.40)$$

Satz 1.21. *Der Preis einer n -Bermuda-Put-Option ist gegeben durch²*

$$P_n^{(n)}(S, K, T) = \sup_{\tau \in \mathcal{S}_{0,T}(\mathcal{Z}_n)} \mathbb{E}^* [e^{-\tau r} (K - S_\tau)^+ \mid S_0 = S], \quad (1.41)$$

mit $\mathcal{Z}_n := \{t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \dots, t_n^{(n)}\}$.

¹Der Beweis kann z.B. bei Karatzas [69], Myneni [93] oder im Buch von Peskir und Shiryaev [96] gefunden werden.

²Hier verweisen wir z.B. auf Schweizer [105] oder auf das Buch von Lamberton und Lapeyre [78].

Lemma 1.22. *Bei der immer feiner werdenden Zerlegung nähert sich der Preis einer n -Bermuda-Put-Option dem Preis einer amerikanischen Put-Option an, d.h. es gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n^{(n)}(S, K, T) = P^A(S, K, T). \quad (1.42)$$

Beweis. Für jedes $\tau \in \mathcal{S}_{0,T}$ definieren wir

$$\tau_n := \sum_{i=0}^{n-1} t_{i+1}^{(n)} \mathbb{1}_{\{t_i^{(n)} < \tau \leq t_{i+1}^{(n)}\}} \quad (1.43)$$

und bezeichnen mit \mathcal{T}_n die Menge aller solcher τ_n . Es ist ersichtlich, dass $\tau_n \searrow \tau$ für $n \rightarrow \infty$ und $\mathcal{T}_n \subseteq \mathcal{S}_{0,T}(\mathcal{Z}_n)$ ist. Mit der Jensenschen Ungleichung und der majorisierten Konvergenz mit K als Majorante folgt ferner für jedes $\tau \in \mathcal{S}_{0,T}$

$$\begin{aligned} & \left| \mathbb{E}^* \left[e^{-\tau r} (K - S_\tau)^+ \right] - \mathbb{E}^* \left[e^{-\tau_n r} (K - S_{\tau_n})^+ \right] \right| \\ & \leq \mathbb{E}^* \left[\left| e^{-\tau r} (K - S_\tau)^+ - e^{-\tau_n r} (K - S_{\tau_n})^+ \right| \right] \rightarrow 0, \quad \text{falls } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Das bedeutet (wegen $\mathcal{T}_n \subseteq \mathcal{S}_{0,T}(\mathcal{Z}_n)$), dass

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} P_n^{(n)}(S, K, T) \geq P^A(S, K, T) \quad (1.44)$$

gilt. Andererseits gilt $P_n^{(n)}(S, K, T) \leq P^A(S, K, T)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Somit kann eine n -Bermuda-Put-Option für die näherungsweise Berechnung einer amerikanischen Put-Option verwendet werden.

Bemerkung 1.23. Es sei \mathcal{Z}_n eine Zerlegung des Intervalls $[0, T]$ und S_k^* bezeichne den kritischen Preis einer amerikanischen Put-Option zur Zeit t_k . Auf der Menge $\{S_k \leq S_k^*\}$ ist die amerikanische Put-Option gleich ihrem inneren Wert, also $P^A(S_k, K, T_k) = K - S_k$. Weiterhin gilt nach (1.31) für alle $S_k \in [0, \infty)$

$$P_{n-k}^{(n)}(S_k, K, T_k) \geq K e^{-r(t_{k+1}-t_k)} - S_k.$$

Auf der Menge $\{S_k \leq S_k^*\}$ können wir somit für die Differenz der Preise der amerikanischen und n -Bermuda-Put-Option folgern

$$P^A(S_k, K, T_k) - P_{n-k}^{(n)}(S_k, K, T_k) \leq K \left(1 - e^{-r(t_{k+1}-t_k)} \right). \quad (1.45)$$

Insbesondere für $k = 0$ gilt auf der Menge $\{S_0 \leq S_0^*\}$

$$P^A(S_0, K, T_0) - P_n^{(n)}(S_0, K, T_0) \leq K \left(1 - e^{-r(t_1 - t_0)}\right) \leq K \left(1 - e^{-r\Delta_n}\right), \quad (1.46)$$

wobei $\Delta_n := \max_i \left\{t_{i+1}^{(n)} - t_i^{(n)}\right\}$ ist.

Es zeigt sich, dass sich auf der Menge $\{S_0 > S_0^*\}$ dieselbe Schranke für die Differenz der Preise einer amerikanischen und einer n -Bermuda-Put-Option angeben lässt. Dies belegt auch der folgende Satz von Carverhill und Webber [21].

Satz 1.24. *Es seien \mathcal{Z}_n eine Zerlegung des Intervalls $[0, T]$ und $\Delta_n := \max_i \left\{t_{i+1}^{(n)} - t_i^{(n)}\right\}$ die Feinheit dieser Zerlegung. Es gilt*

$$0 \leq P^A(S, K, T) - P_n^{(n)}(S, K, T) \leq K \left(1 - e^{-r\Delta_n}\right). \quad (1.47)$$

Beweis. Wie beim Beweis von Lemma 1.22 definieren wir für jede Stoppzeit $\tau \in \mathcal{S}_{0,T}$ die Stoppzeit τ_n durch

$$\tau_n := \sum_{i=0}^{n-1} t_{i+1}^{(n)} \mathbb{1}_{\left\{t_i^{(n)} < \tau \leq t_{i+1}^{(n)}\right\}}. \quad (1.48)$$

Es sei nun τ^* die Stoppzeit, bei der das Supremum in (1.40) angenommen wird¹. Nach der Definition ist τ_n^* die nächste Stoppzeit nach τ^* mit Werten in \mathcal{Z}_n . Es gilt

$$\sup_{\tau \in \mathcal{S}_{0,T}(\mathcal{Z}_n)} \mathbb{E}^* \left[e^{-r\tau} (K - S_\tau)^+ \mid S_0 \right] \geq \mathbb{E}^* \left[e^{-r\tau_n^*} (K - S_{\tau_n^*})^+ \mid S_0 \right]$$

und somit

$$\begin{aligned} 0 &\leq P^A(S, K, T) - P_n^{(n)}(S, K, T) \\ &\leq \mathbb{E}^* \left[e^{-r\tau^*} (K - S_{\tau^*})^+ \mid S_0 \right] - \mathbb{E}^* \left[e^{-r\tau_n^*} (K - S_{\tau_n^*})^+ \mid S_0 \right] \\ &= \mathbb{E}^* \left[\mathbb{E}^* \left[e^{-r\tau^*} \left((K - S_{\tau^*})^+ - e^{-r(\tau_n^* - \tau^*)} (K - S_{\tau_n^*})^+ \right) \mid S_{\tau^*} \right] \mid S_0 \right] \\ &= \mathbb{E}^* \left[e^{-r\tau^*} (K - S_{\tau^*} - p^E(S_{\tau^*}, K, \tau_n^* - \tau^*)) \mid S_0 \right] \end{aligned}$$

¹ $\tau^* = \inf\{t \in [0, T] \mid P^A(S_t, K, T - t) = K - S_t\}$ mit $\inf \emptyset = T$ (vgl. [92], [96]).

$$\begin{aligned}
 &\leq \mathbb{E}^* \left[e^{-r\tau^*} \left(K - S_{\tau^*} - K e^{-r(\tau_n^* - \tau^*)} + S_{\tau^*} \right) \mid S_0 \right] \\
 &= \mathbb{E}^* \left[e^{-r\tau^*} \left(K \left(1 - e^{-r(\tau_n^* - \tau^*)} \right) \right) \mid S_0 \right] \\
 &\leq K \left(1 - e^{-r\Delta_n} \right).
 \end{aligned}$$

Dabei haben wir in der obigen Rechnung $S_{\tau^*} \leq K$ benutzt und die folgende Abschätzung

$$p^E(S, K, T) \geq K e^{-rT} - S$$

für den Preis einer europäischen Put-Option verwendet. □

Bemerkung 1.25. Die Schranke $K(1 - e^{-r\Delta_n})$ hängt weder von dem aktuellen Aktienkurs S ab, noch von der Volatilität σ . Für beide Parameter folgt daher die gleichmäßige Konvergenz der Preise.

Bemerkung 1.26. Der Satz 1.24 gibt uns ein $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ an, so dass für alle $n \geq n_\epsilon$ die Differenz zwischen den Preisen einer amerikanischen Put-Option und einer n -Bermuda-Put-Option kleiner als eine vorgegebene Schranke $\epsilon > 0$ ausfällt. Dies erlaubt uns den Preis einer amerikanischen Put-Option beliebig genau durch den Preis einer n -Bermuda-Put-Option zu approximieren. Im Falle einer arithmetischen Zerlegung $\mathcal{Z}_n = \{0, T/n, \dots, nT/n\}$ beispielsweise ist die Differenz der Preise kleiner als $\epsilon > 0$ für alle $n \geq KrT/\epsilon$. Für den Ausübungspreis $K = 100$, den Zinssatz $r = 0.04$, die Laufzeit $T = 1$ und die Genauigkeit bis auf 1 Cent, d.h. $\epsilon = 0.01$, ergibt sich somit $n_\epsilon = 400$.

Wären wir also in der Lage den Preis einer 400-Bermuda-Put-Option anzugeben, so hätten wir den Preis einer amerikanischen Option bis auf 1 Cent genau bestimmt. Gerade hier liegt das Problem, denn bei der Berechnung einer 400-Bermuda-Put-Option nach der Geske-Johnson-Formel werden rekursive und mehrmalige Berechnungen von bis zu 400-dimensionalen Integralen benötigt.¹ Letzteres ist schon für kleine n (z.B. schon ab $n \geq 4$) eine große numerische Herausforderung. Um ein Gefühl für den Berechnungsaufwand zu bekommen, sei hier erwähnt, dass bei vielen Algorithmen zur Berechnung der multivariaten Normalverteilungen zunächst ein Sortieralgorithmus (geeignete Sortierung der Integrationsgrenzen, siehe Kapitel 4) der Komplexität $\mathcal{O}(n^3)$ (!) angewandt wird, um die gesamte Berechnung zu beschleunigen. Die Problematik der numerischen Berechnung der multivariaten Normalverteilungen für hohe Dimensionen, sowie die für solche Berechnungen zur Verfügung stehenden Methoden werden in Kapitel 4 genauer erläutert.

Die Abschätzung aus Satz 1.24 erlaubt es uns dennoch eine Abschätzung der Differenz der kritischen Ränder einer amerikanischen und einer n -Bermuda-Put-Option zu erhalten.

¹Mit dem Algorithmus aus Abschnitt 4.2.1 dieser Arbeit, der die besondere Struktur der Korrelationsmatrix ausnutzt, kann die Dimension des Integrals zwar halbiert werden, der immense Rechenaufwand bleibt jedoch immer noch bestehen.

Mit ähnlichen Methoden wie in [76] oder [79] kann gezeigt werden, dass die Differenz $S_{t,(n)}^* - S_t^*$ mit $t \in \mathcal{Z}_n$ von der Ordnung $\mathcal{O}(\sqrt{\Delta_n})$ ist. Zur Erinnerung, der kritische Preis (zur Zeit t) einer amerikanischen Put-Option ist definiert durch $S_t^* = \sup\{S \in \mathbb{R}^+ \mid P^A(S, K, T - t) = K - S\}$ (bzw. $S_t^* = \inf\{S \in \mathbb{R}^+ \mid P^A(S, K, T - t) > K - S\}$).

1.3.2. Konvergenz der kritischen Ränder

Es sei \mathcal{Z}_n eine Zerlegungsfolge des Intervalls $[t, T]$. Aus der Definition der kritischen Ränder amerikanischer und n -Bermuda-Put-Optionen und aus $P_n^{(n)}(S, K, \tau) \leq P^A(S, K, \tau)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt $S_{t,(n)}^* \geq S_t^*$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dabei bezeichnet $\tau := T - t$ die Restlaufzeit beider Optionen.

Satz 1.27. *Für die Differenz der kritischen Preise einer amerikanischen und einer n -Bermuda-Put-Option gilt zur Zeit t*

$$0 \leq S_{t,(n)}^* - S_t^* \leq \sigma K \sqrt{\frac{e^{r\tau}}{rN\left(-\frac{r}{\sigma}\sqrt{\tau}\right)}} \sqrt{1 - e^{-r\Delta_n}}, \quad (1.49)$$

dabei ist $\Delta_n := \max_i \{t_{i+1}^{(n)} - t_i^{(n)}\}$ die Feinheit der Zerlegung \mathcal{Z}_n (bzw. der Ausübungspunkte der Bermuda-Option).

Beweis. Zunächst betrachten wir die Taylor-Entwicklung der amerikanischen Put-Option P^A nach S um den Punkt S_t^* .¹ Es gilt

$$P^A(S_{t,(n)}^*) = P^A(S_t^*) + (S_{t,(n)}^* - S_t^*) \frac{\partial P^A}{\partial S}(S_t^*) + \frac{(S_{t,(n)}^* - S_t^*)^2}{2} \frac{\partial^2 P^A}{\partial S^2}(\xi)$$

wobei $\xi \in (S_t^*, S_{t,(n)}^*)$ ist. Mit $P^A(S_t^*) = K - S_t^*$ und $\frac{\partial P^A(S_t^*)}{\partial S} = -1$ folgt weiterhin

$$\begin{aligned} P^A(S_{t,(n)}^*) &= K - S_t^* - S_{t,(n)}^* + S_t^* + \frac{(S_{t,(n)}^* - S_t^*)^2}{2} \frac{\partial^2 P^A}{\partial S^2}(\xi) \\ &= P_n^{(n)}(S_{t,(n)}^*) + \frac{(S_{t,(n)}^* - S_t^*)^2}{2} \frac{\partial^2 P^A}{\partial S^2}(\xi) \end{aligned}$$

und daraus mit $P^A(S_{t,(n)}^*) - P_n^{(n)}(S_{t,(n)}^*) \leq K(1 - e^{-r\Delta_n})$ folgt

¹Für die amerikanische Put-Option gilt $P^A \in C^2((S_t^*, \infty))$ in S (vgl. [57], [96]). Weiterhin wird der Übersicht wegen die Abhängigkeit des Preises von dem Ausübungspreis K und der Restlaufzeit τ im Beweis nicht aufgeführt.

$$\frac{(S_{t,(n)}^* - S_t^*)^2}{2} \frac{\partial^2 P^A}{\partial S^2}(\xi) \leq K(1 - e^{-r\Delta_n}). \quad (1.50)$$

Um eine Abschätzung für $S_{t,(n)}^* - S_t^*$ zu erhalten bleibt noch zu zeigen, dass die zweite partielle Ableitung $\frac{\partial^2 P^A}{\partial S^2}$ nach unten durch eine Konstante $C > 0$, die nur von den Modellparametern und nicht von n abhängt, beschränkt ist. Für $\xi > S_t^*$ erfüllt die amerikanische Put-Option P^A die partielle Black-Scholes Differentialgleichung (vgl. [57], [96])

$$\frac{1}{2}\sigma^2\xi^2\frac{\partial^2 P^A}{\partial S^2}(\xi) = -r\xi\frac{\partial P^A}{\partial S}(\xi) + rP^A(\xi) - \frac{\partial P^A}{\partial t}(\xi).$$

Mit $-\frac{\partial P^A}{\partial t}(\xi) \geq 0$ und $-r\xi\frac{\partial P^A}{\partial S}(\xi) + rP^A(\xi) = rK\frac{\partial P^A}{\partial K}(\xi)$ erhalten wir¹

$$\frac{1}{2}\sigma^2\xi^2\frac{\partial^2 P^A}{\partial S^2}(\xi) \geq rK\frac{\partial P^A}{\partial K}(\xi). \quad (1.51)$$

Aus dieser Darstellung wird schon ersichtlich, dass $\frac{\partial^2 P^A}{\partial S^2}(\xi)$ nach unten beschränkt ist, denn $\frac{\partial P^A}{\partial K}(\xi) \approx 1$ für ξ in der Nähe von S_t^* . Für die partielle Ableitung einer amerikanischen Put-Option nach dem Ausübungspreis K kann zum Beispiel folgende untere Schranke angegeben werden

$$\frac{\partial P^A}{\partial K}(\xi) \geq \frac{\partial p^E}{\partial K}(\xi) = e^{-r\tau} N\left(\frac{\log \frac{K}{\xi} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) \geq e^{-r\tau} N\left(-\frac{r}{\sigma}\sqrt{\tau}\right). \quad (1.52)$$

Die erste Ungleichung in der obigen Formel folgt dabei aus der Tatsache, dass die Early-Exercise-Prämie monoton wachsend in K ist. Das Einsetzen von (1.51) und (1.52) in (1.50) liefert

$$S_{t,(n)}^* - S_t^* \leq \sigma K \sqrt{\frac{e^{r\tau}}{rN\left(-\frac{r}{\sigma}\sqrt{\tau}\right)}} \sqrt{1 - e^{-r\Delta_n}},$$

und daher die Behauptung. □

Bemerkung 1.28. Mit den Methoden aus der Arbeit von Chevalier [23] kann die folgende Abschätzung gewonnen werden

$$0 \leq S_{t,(n)}^* - S_t^* \leq K \sqrt{\left(\frac{\sigma^2}{r} + 2\right) (1 - e^{-r\Delta_n})}. \quad (1.53)$$

Der Beweis dieser Abschätzung findet sich im Anhang B.

¹Amerikanische Put-Option ist eine monoton wachsende Funktion der Restlaufzeit. Weiterhin ist sie eine in S und K homogene Funktion vom Grad 1, d.h. $\lambda P^A(S, K) = P^A(\lambda S, \lambda K)$.

Bemerkung 1.29. Für eine Zerlegungsfolge \mathcal{Z}_n mit den Eigenschaften $\mathcal{Z}_i \subset \mathcal{Z}_j$ für $i < j$ und $\Delta_n \rightarrow 0$ (d.h. \mathcal{Z}_n ist eine Zerlegungsnullfolge) folgt die monotone Konvergenz von $S_{t,(n)}^*$ gegen S_t^* . Denn es gilt

$$K - P_{n+1}^{(n+1)}(S, K, T - t) \leq K - P_n^{(n)}(S, K, T - t)$$

und somit $S_{t,(n+1)}^* \leq S_{t,(n)}^*$.

Wir wollen an dieser Stelle noch eine Abschätzung für die Differenz zweier benachbarter kritischer Preise einer n -Bermuda-Put-Option $S_{k+1,(n)}^* - S_{k,(n)}^*$ angeben. Dazu wird zunächst eine Abschätzung für die Differenz der kritischen Preise $S_{t_2}^*$ und $S_{t_1}^*$ für $t_1, t_2 \in [0, T]$ einer amerikanischen Put-Option hergeleitet, womit dann mit Hilfe der Abschätzung (1.49) aus Satz 1.27 das gewünschte Resultat geschlussfolgert wird. Der Übersicht wegen wird ab hier die Abhängigkeit vom Ausübungspreis K nicht explizit dargestellt.

Lemma 1.30. *Es seien $S_{t_1}^*, S_{t_2}^*$ kritische Preise (zu Zeiten $t_1, t_2 \in [0, T]$) einer amerikanischen Put-Option mit den Parametern $\{\sigma, r, K, T\}$. Ferner sei $t_1 < t_2$, dann gilt $S_{t_1}^* \leq S_{t_2}^*$ und weiter*

$$0 \leq S_{t_2}^* - S_{t_1}^* \leq \sigma \sqrt{\frac{e^{rT_1} K}{rN\left(-\frac{r}{\sigma} \sqrt{T_1}\right)}} \sqrt{P^A(S_{t_2}^*, T_1) - P^A(S_{t_2}^*, T_2)}, \quad (1.54)$$

wobei $T_i = T - t_i$ ist.

Beweis. Zur Monotonie von S_t^* siehe Kapitel 3. Ähnlich wie im Beweis des Satzes 1.27 machen wir wieder von der Taylor-Entwicklung des Preises einer amerikanischen Put-Option nach dem Aktienkurs gebrauch, allerdings diesmal um den Punkt $S_{t_1}^*$. Es gilt demnach

$$P^A(S_{t_2}^*, T_1) = P^A(S_{t_1}^*, T_1) + (S_{t_2}^* - S_{t_1}^*) \frac{\partial P^A}{\partial S}(S_{t_1}^*, T_1) + \frac{1}{2} (S_{t_2}^* - S_{t_1}^*)^2 \frac{\partial^2 P^A}{\partial S^2}(\xi, T_1),$$

wobei $\xi \in (S_{t_1}^*, S_{t_2}^*)$ ist. Aus $P^A(S_{t_1}^*, T_1) = K - S_{t_1}^*$, $\frac{\partial P^A}{\partial S}(S_{t_1}^*, T_1) = -1$ und $P^A(S_{t_2}^*, T_2) = K - S_{t_2}^*$ folgt somit für die Differenz der kritischen Preise

$$S_{t_2}^* - S_{t_1}^* = \sqrt{\frac{P^A(S_{t_2}^*, T_1) - P^A(S_{t_2}^*, T_2)}{\frac{1}{2} \frac{\partial^2 P^A}{\partial S^2}(\xi, T_1)}}.$$

Die Behauptung folgt aus

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 P^A}{\partial S^2}(\xi, T_1) \geq \frac{r e^{-rT_1}}{\sigma^2 K} N\left(-\frac{r}{\sigma} \sqrt{T_1}\right).$$

□

Lemma 1.31 (Hilfslemma). Für die standardisierte Brownsche Bewegung W sei der Prozess m definiert durch $m_t := \inf_{0 \leq s \leq t} W_s$. Die Dichtefunktion φ_t der Zufallsvariable m_t ist gegeben durch (vgl. [60],[70])

$$\varphi_t(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} e^{\frac{-x^2}{2t}} \mathbb{1}_{\{x < 0\}}. \quad (1.55)$$

Weiterhin gilt

$$\mathbb{E} \left[\inf_{0 \leq s \leq t} e^{\sigma W_s} \right] = 2 e^{\frac{\sigma^2}{2} t} N(-\sigma \sqrt{t}). \quad (1.56)$$

Beweis. Mit dem Spiegelungsprinzip der Brownschen Bewegung (vgl. [70]) gilt

$$\mathbb{P} \left(\inf_{0 \leq s \leq t} W_s \leq x \right) = 2\mathbb{P}(W_t \leq x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2t}} dy, \quad x < 0.$$

Das Ableiten nach x liefert (1.55). Für den zweiten Teil der Behauptung gilt

$$\mathbb{E} \left[\inf_{0 \leq s \leq t} e^{\sigma W_s} \right] = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^0 e^{\sigma x} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{\sigma^2}{2} t} \int_{-\infty}^{-\sigma \sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 2 e^{\frac{\sigma^2}{2} t} N(-\sigma \sqrt{t}).$$

□

Lemma 1.32. Für $0 \leq t_1 < t_2 < T$ und $S \in [0, \infty)$ gilt für die Differenz der Preise amerikanischer Put-Optionen mit verschiedenen Restlaufzeiten und sonst identischen Parametern

$$0 \leq P^A(S, T_1) - P^A(S, T_2) \leq S e^{rT} (1 - 2N(-\sigma \sqrt{t_2 - t_1})), \quad (1.57)$$

wobei $T_i = T - t_i$ die Restlaufzeit ist.

Beweis. Es sei τ_1 die optimale Stoppzeit für die amerikanische Put-Option mit längerer Restlaufzeit $P^A(S, T_1)$. Wir definieren die Stoppzeit τ_2 als $\tau_2 := \tau_1 \wedge T_2$. Dann folgt (vgl. [96])

$$\begin{aligned} 0 \leq P^A(S, T_1) - P^A(S, T_2) &\leq \mathbb{E}^* [e^{-r\tau_1} (K - S_{\tau_1})^+] - \mathbb{E}^* [e^{-r\tau_2} (K - S_{\tau_2})^+] \\ &\leq \mathbb{E}^* [e^{-r\tau_2} ((K - S_{\tau_1})^+ - (K - S_{\tau_2})^+)] \\ &\leq \mathbb{E}^* [((K - S_{\tau_1})^+ - (K - S_{\tau_2})^+)] \\ &\leq \mathbb{E}^* [(S_{\tau_2} - S_{\tau_1})^+] \\ &= \mathbb{E}^* [S_{\tau_2} \mathbb{E}^* [(1 - S_{\tau_1}/S_{\tau_2})^+ \mid \mathcal{F}_{\tau_2}]] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq S e^{rT} \mathbb{E}^* \left[(1 - S_{\tau_1}/S_{\tau_2})^+ \right] \\
&= S e^{rT} \mathbb{E}^* \left[\left(1 - e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(\tau_1 - \tau_2) + \sigma(W_{\tau_1} - W_{\tau_2})} \right)^+ \right] \\
&\leq S e^{rT} \mathbb{E}^* \left[1 - \inf_{0 \leq s \leq t_2 - t_1} e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)s + \sigma W_s} \right] \\
&\leq S e^{rT} \left(1 - \inf_{0 \leq s \leq t_2 - t_1} e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)s} \mathbb{E}^* \left[\inf_{0 \leq s \leq t_2 - t_1} e^{\sigma W_s} \right] \right).
\end{aligned}$$

Aus

$$- \inf_{0 \leq s \leq t_2 - t_1} e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)s} \leq -e^{-\frac{\sigma^2}{2}(t_2 - t_1)}$$

und mit (1.56) aus Hilfslemma 1.31 folgt die Behauptung. \square

Satz 1.33. *Es seien $t_1, t_2 \in [0, T)$ mit $t_1 < t_2$. Für die Differenz der kritischen Preise einer amerikanischen Put-Option mit den Parametern $\{\sigma, r, K, T\}$ gilt*

$$S_{t_2}^* - S_{t_1}^* \leq \sigma K \sqrt{\frac{e^{2rT}}{rN\left(-\frac{r}{\sigma}\sqrt{T}\right)}} \sqrt{(1 - 2N(-\sigma\sqrt{t_2 - t_1}))}. \quad (1.58)$$

Beweis. Die Behauptung des Satzes folgt direkt aus Lemma 1.30 und Lemma 1.32. \square

Satz 1.34. *Es sei $\mathcal{Z}_n = \{t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \dots, t_n^{(n)}\}$ eine äquidistante Zerlegung des Intervalls $[0, T]$ und $\Delta_n = \max_i \{t_{i+1}^{(n)} - t_i^{(n)}\}$ die Feinheit dieser Zerlegung. Für die Differenz der benachbarten kritischen Preise einer n -Bermuda-Put-Option gilt die folgende Abschätzung*

$$S_{k+1, (n)}^* - S_{k, (n)}^* \leq \sigma K \sqrt{\frac{e^{2rT}}{rN\left(-\frac{r}{\sigma}\sqrt{T}\right)}} \left(\sqrt{1 - e^{-r\Delta_n}} + \sqrt{(1 - 2N(-\sigma\sqrt{\Delta_n}))} \right), \quad (1.59)$$

wobei $k = 0, 1, \dots, n-1$ ist und $S_{k, (n)}^*$ den kritischen Preis zur Zeit $t_k^{(n)}$ einer n -Bermuda-Put-Option bezeichnet.

Kapitel 1. n -Bermuda-Put-Option nach Geske und Johnson

Beweis. Es gilt $P_{n-k}^{(n)}(S, T_k) \leq P^A(S, T_k)$ für alle S . Daraus folgt $S_k^* \leq S_{k,(n)}^*$ und weiter

$$S_{k+1,(n)}^* - S_{k,(n)}^* \leq S_{k+1,(n)}^* - S_k^* = S_{k+1,(n)}^* - S_{k+1}^* + S_{k+1}^* - S_k^*.$$

Die obere Schranke für den ersten Differenzterm ist (1.49). Die Abschätzung für die zweite Differenz folgt aus Satz 1.33. □

Wir schließen diesen Abschnitt mit einer diskreten Version des Lemmas 1.32 ab.

Lemma 1.35. *Es sei $\mathcal{Z}_n = \{0 = t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \dots, t_n^{(n)} = T\}$ eine äquidistante Zerlegung des Intervalls $[0, T]$ und $\Delta_n = \max_i \{t_{i+1}^{(n)} - t_i^{(n)}\}$ die Feinheit dieser Zerlegung. Es gilt*

$$0 \leq P_n^{(n)}(S, T) - P_{n-1}^{(n)}(S, T - t_1) \leq S e^{rT} (N(-b_{\Delta_n}) - e^{r\Delta_n} N(-a_{\Delta_n})), \quad (1.60)$$

wobei b_{Δ_n} und a_{Δ_n} durch

$$b_{\Delta_n} := \frac{r - \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma} \sqrt{\Delta_n}, \quad a_{\Delta_n} := b_{\Delta_n} + \sigma \sqrt{\Delta_n}$$

gegeben sind.

Beweis. Da die Zerlegung äquidistant ist, gilt $t_{n-1} = T - t_1$. Ähnlich wie beim Beweis des Lemmas 1.32 sei τ_n (mit den Werten in \mathcal{Z}_n) die optimale Stoppzeit¹ für die Bermuda-Put-Option $P_n^{(n)}$. Wir definieren eine weitere Stoppzeit τ_{n-1} durch $\tau_{n-1} = \tau_n \wedge t_{n-1}$. Somit gilt

$$\begin{aligned} 0 &\leq P_n^{(n)}(S, T) - P_{n-1}^{(n)}(S, t_{n-1}) \\ &\leq \mathbb{E} \left[e^{-r\tau_n} (K - S_{\tau_n})^+ - e^{-r\tau_{n-1}} (K - S_{\tau_{n-1}})^+ \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[e^{-r\tau_{n-1}} \left((K - S_{\tau_n})^+ - (K - S_{\tau_{n-1}})^+ \right) \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[(S_{\tau_{n-1}} - S_{\tau_n})^+ \right] \\ &= \mathbb{E} \left[(S_{\tau_{n-1}} - S_{\tau_n})^+ \mathbb{1}_{\{\tau_n < T\}} \right] + \mathbb{E} \left[(S_{\tau_{n-1}} - S_{\tau_n})^+ \mathbb{1}_{\{\tau_n = T\}} \right] \end{aligned}$$

¹Die Stoppzeit τ_n ist die Stoppzeit, bei der das Supremum in (1.41) angenommen wird, z.B. die minimale optimale Stoppzeit $\tau_n = \inf\{t_i \in \mathcal{Z}_n \mid P_{n-i}^{(n)}(S_i, T_i) = K - S_i, i = 1, \dots, n\}$ mit $\inf \emptyset = T$ (vgl. [92]).

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E} \left[(S_{t_{n-1}} - S_{t_n})^+ \mathbb{1}_{\{\tau_n = T\}} \right] \\
&\leq \mathbb{E} \left[(S_{t_{n-1}} - S_{t_n})^+ \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[(S_{t_{n-1}} - S_{t_n}) \mathbb{1}_{\{S_{t_n} \leq S_{t_{n-1}}\}} \mid S_{t_{n-1}} \right] \right] \\
&= \mathbb{E} \left[S_{t_{n-1}} (N(-b_{\Delta_n}) - e^{r\Delta_n} N(-a_{\Delta_n})) \right] \\
&\leq S e^{rT} (N(-b_{\Delta_n}) - e^{r\Delta_n} N(-a_{\Delta_n})).
\end{aligned}$$

Dabei sind b_{Δ_n} und a_{Δ_n} wie folgt definiert

$$b_{\Delta_n} := \frac{r - \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma} \sqrt{\Delta_n}, \quad a_{\Delta_n} := b_{\Delta_n} + \sigma \sqrt{\Delta_n}.$$

Es sei hier noch erwähnt, dass die Funktion

$$f(\Delta_n) := N(-b_{\Delta_n}) - e^{r\Delta_n} N(-a_{\Delta_n})$$

positiv ist, denn es gilt $f(0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial \Delta_n} > 0$ und somit folgt $f(\Delta_n) \geq 0$. □

Bemerkung 1.36. Für die Funktion $f(\Delta_n)$ kann folgende Abschätzung angegeben werden

$$f(\Delta_n) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (a_{\Delta_n} - b_{\Delta_n}) \leq \sigma \sqrt{\Delta_n}.$$

1.3.3. Konvergenz der einzelnen Terme in der Geske-Johnson-Formel

In Lemma 1.22 wurde gezeigt, dass eine n -Bermuda-Put-Option gegen eine amerikanische Put-Option mit denselben Parametern konvergiert. Zusammen mit der Geske-Johnson-Formel (1.10) kann somit der Preis einer amerikanischen Put-Option wie folgt dargestellt werden

$$P^A(S, K, T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(K \sum_{k=1}^n e^{-rt_k} N_k(\mathbf{b}_{1k}; \mathbf{R}_{1k}) - S \sum_{k=1}^n N_k(\mathbf{a}_{1k}; \mathbf{R}_{1k}) \right). \quad (1.61)$$

In diesem Abschnitt wollen wir auf die Konvergenz der einzelne Terme in (1.61) eingehen.

Nach Bemerkung 1.15 lässt sich die zweite Summe in der Formel (1.61) wie folgt vereinfachen

$$\sum_{k=1}^n N_k(\mathbf{a}_{1k}; \mathbf{R}_{1k}) = 1 - \tilde{\mathbb{P}}(S_1 > S_1^*, \dots, S_n > S_n^*).$$

Dabei sind $S_k = S_0 \exp \left\{ \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) t_k + \sigma W_{t_k} \right\}$ eine geometrische Brownsche Bewegung zur Zeit t_k unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß $\tilde{\mathbb{P}}$ und S_k^* der kritische Preis (zur Zeit t_k) einer n -Bermuda-Put-Option.

An dieser Stelle machen wir die Abhängigkeit von der Zerlegung \mathcal{Z}_n erneut kenntlich und hängen den Index $\cdot_{(n)}$ an. Das zu untersuchende Problem ist somit die Existenz des folgenden Grenzwertes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\mathbb{P}} \left(S_{1,(n)} > S_{1,(n)}^*, \dots, S_{n,(n)} > S_{n,(n)}^* \right). \quad (1.62)$$

Dazu sei \mathcal{Z}_n eine Zerlegungsfolge des Intervalls $[0, T]$ mit der Eigenschaft $\mathcal{Z}_i \subset \mathcal{Z}_j$ für $i < j$. Für die Feinheit dieser Zerlegung Δ_n gelte weiter $\Delta_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ d.h. \mathcal{Z}_n ist eine Zerlegungsnullfolge. Für ein beliebiges, aber festes $k \in \mathbb{N}$ existiert nach Satz 1.27 ein $n_k \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n > n_k$ gilt

$$\underbrace{\bigcap_{t \in \mathcal{Z}_n} \{S_t > S_t^* + 1/k\}}_{:= A_{n,k}^+} \subseteq \underbrace{\bigcap_{t \in \mathcal{Z}_n} \{S_t > S_{t,(n)}^*\}}_{:= A_n} \subseteq \underbrace{\bigcap_{t \in \mathcal{Z}_n} \{S_t > S_t^* - 1/k\}}_{:= A_{n,k}^-},$$

woraus folgt

$$\tilde{\mathbb{P}} \left(A_{n,k}^+ \right) \leq \tilde{\mathbb{P}} \left(A_n \right) \leq \tilde{\mathbb{P}} \left(A_{n,k}^- \right). \quad (1.63)$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\mathbb{P}} \left(A_{n,k}^- \right) &= \tilde{\mathbb{P}} \left(\bigcap_k \bigcap_n A_{n,k}^- \right) = \tilde{\mathbb{P}} \left(\bigcap_n \bigcap_{t \in \mathcal{Z}_n} \{S_t > S_t^*\} \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\mathbb{P}} \left(A_{n,k}^+ \right). \end{aligned}$$

Daraus folgt die Existenz des Grenzwertes in (1.62). Aus der Konvergenz von $P_n^{(n)}(S, K, T)$ und $S \sum_{k=1}^n N_k(\mathbf{a}_{1k}^{(n)}; \mathbf{R}_{1k}^{(n)})$ kann die Konvergenz von $K \sum_{k=1}^n e^{-rt_k^{(n)}} N_k(\mathbf{b}_{1k}^{(n)}; \mathbf{R}_{1k}^{(n)})$ geschlossen werden. Insgesamt folgt somit

$$P^A(S, K, T) = \lim_{n \rightarrow \infty} K \sum_{k=1}^n e^{-rt_k^{(n)}} N_k \left(\mathbf{b}_{1k}^{(n)}; \mathbf{R}_{1k}^{(n)} \right) - \lim_{n \rightarrow \infty} S \sum_{k=1}^n N_k \left(\mathbf{a}_{1k}^{(n)}; \mathbf{R}_{1k}^{(n)} \right), \quad (1.64)$$

wobei sich der zweite Term als komplementäre Wahrscheinlichkeit, dass sich die geometrische Brownsche Bewegung in (1.21) auf der dichten Teilmenge $\mathcal{Z} = \bigcup \mathcal{Z}_n$ von $[0, T]$ über dem kritischen Rand der amerikanischen Put-Option befindet, interpretieren lässt.

1.4. Early-Exercise-Prämie

Eine der bekanntesten Darstellungen des Preises einer amerikanischen Put-Option ist die folgende (siehe z. B. Myneni [93])

$$P^A(S_0, T) = \underbrace{\mathbb{E}^* \left[e^{-rT} (K - S_T)^+ \mid S_0 \right]}_{=p^E(S_0, T)} + \underbrace{\mathbb{E}^* \left[\int_0^T e^{-ru} r K \mathbb{1}_{\{S_u < S_u^*\}} du \mid S_0 \right]}_{\text{Early-Exercise-Prämie: } =e^A(S_0, T)}, \quad (1.65)$$

dabei bezeichnen $p^E(S_0, T)$ den Preis einer europäischen Put-Option und S_u^* den kritischen Preis zum Zeitpunkt u . Die amerikanische Put-Option kann somit als eine europäische Put-Option zuzüglich der Prämie (Early-Exercise-Prämie) für die Möglichkeit der vorzeitigen Ausübung aufgefasst werden.

Intuitiv kann diese Zerlegung wie folgt erklärt werden (siehe Carr et al. [20]). Ein Investor hält eine amerikanische Put-Option immer wenn der Aktienkurs sich über dem kritischen Rand befindet (zur Zeit t_0 ist das der Fall, d.h. $S_0 > S_0^*$, nach unserer Vereinbarung). Falls nun der Aktienkurs im Laufe der Zeit fällt und den kritischen Rand von oben berührt, übt der Investor seine Option aus, liefert die Aktie dem Verkäufer der Option (Leerverkauf) und legt den Geldbetrag K (Ausübungspreis) zu einem risikolosen Zinssatz an. Falls der Aktienkurs steigt und diesmal den kritischen Rand von unten berührt, so kauft der Investor eine amerikanische Put-Option für $K - S$ und schließt den Leerverkauf in der Aktie. Diese Strategie ist aufgrund der sogenannten *smooth fit* Bedingung¹ selbstfinanzierend. Das Auszahlungsprofil der Strategie am Ende ist gleich der Auszahlung der europäischen Put-Option. Demnach ist der Barwert dieser Strategie gleich dem Preis einer europäischen Put-Option sowie dem Barwert aller akkumulierten Zinsen auf den Ausübungspreis, solange der Aktienkurs sich unter dem kritischen Rand befindet.

Aus den Eigenschaften amerikanischer Put-Optionen folgt, dass für alle $S_0 \in (0, S_0^*]$ eine amerikanische Put-Option gleich ihrem inneren Wert ist. Daraus folgt in Verbindung mit der Gleichung (1.65)²

$$K - S_0 = p^E(S_0, T) + \int_0^T e^{-ru} r K \mathbb{E}^* [\mathbb{1}_{\{S_u < S_u^*\}} \mid S_0] du. \quad (1.66)$$

Somit löst jedes $S_0 \leq S_0^*$ die obige Gleichung, insbesondere $S_0 = S_0^*$. Das Einsetzen von $S_0 = S_0^*$ in die Gleichung (1.66) führt zu der sogenannten *free boundary equation* (vgl. [20]).

Peskir [95] zeigte zudem, dass der kritische Rand $(S_t^*)_{t \in [0, T]}$ einer amerikanischen Put-Option sich als die eindeutige Lösung (in der Klasse der stetigen Funktionen $c : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$

¹ $\lim_{S_t \rightarrow S_t^*} P^A(S_t, t) = K - S_t^*$ und $\lim_{S_t \rightarrow S_t^*} \frac{\partial P^A(S_t, t)}{\partial S_t} = -1$.

²Die Vertauschung der Integrationsreihenfolge folgt aus dem Satz von Fubini.

mit $0 < c(t) < K$ für alle $t \in (0, T)$) der *free-boundary equation*

$$K - S_t^* = p^E(S_t^*, T - t) + \int_t^T e^{-ru} r K \mathbb{E}^* [\mathbb{1}_{\{S_u < S_u^*\}} \mid S_t^*] du \quad (1.67)$$

charakterisieren lässt. Dies eröffnet die Möglichkeit den Preis einer amerikanischen Put-Option numerisch mit Hilfe der Darstellung (1.65) zu berechnen. Zunächst wird das Riemann-Integral in (1.65) diskretisiert, woraus dann (rekursiv) aus den impliziten Gleichungen

$$P^A(S_t^*, T - t) = K - S_t^*$$

die approximativen Werte für die kritischen Preise S_t^* und anschließend für den Preis der Put-Option selbst ermittelt werden können (vgl. [51], [67]).

Eine ähnliche Zerlegung des Preises kann ebenso für eine n -Bermuda-Put-Option gewonnen werden. Dabei folgen wir hier den Darlegungen von Iwaki et al. [55].

1.4.1. Iwaki-Kijima-Yoshida-Darstellung für die Early-Exercise-Prämie einer n -Bermuda-Put-Option

Satz 1.37. *Der Preis einer n -Bermuda-Put-Option $P_n^{(n)}(S, T)$ lässt sich schreiben als*

$$P_n^{(n)}(S, T) = p^E(S, T) + e_n^{(n)}(S, T), \quad (1.68)$$

mit

$$e_n^{(n)}(S, T) = \sum_{k=1}^{n-1} e^{-rt_k} \mathbb{E}^* \left[(K - S_k - p^E(S_k, T_k)) \mathbb{1}_{\{S_1 > S_1^*, \dots, S_{k-1} > S_{k-1}^*, S_k \leq S_k^*\}} \mid S_0 \right].$$

Weiterhin ist jeder Summand in $e_n^{(n)}(S, T)$ positiv und daher gilt $e_n^{(n)}(S, T) \geq 0$.

Beweis. Der Preis einer europäischen Put-Option zur Zeit t ist gegeben durch

$$p^E(S_t, T - t) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^* \left[(K - S_T) \mathbb{1}_{\{S_T \leq S_T^*\}} \mid S_t \right]. \quad (1.69)$$

Weiterhin kann die Menge $\{S_T \leq S_T^*\}$ als disjunkte Vereinigung folgender Mengen aufgefasst werden

$$\begin{aligned} \{S_T \leq S_T^*\} &= \{S_n \leq S_n^*\} = \{S_n \leq S_n^*, S_1 \leq S_1^*\} \\ &\quad \cup \{S_n \leq S_n^*, S_1 > S_1^*, S_2 \leq S_2^*\} \\ &\quad \vdots \\ &\quad \cup \{S_n \leq S_n^*, S_1 > S_1^*, \dots, S_{n-2} > S_{n-2}^*, S_{n-1} \leq S_{n-1}^*\} \\ &\quad \cup \{S_n \leq S_n^*, S_1 > S_1^*, \dots, S_{n-2} > S_{n-2}^*, S_{n-1} > S_{n-1}^*\}. \end{aligned}$$

Somit gilt für die entsprechenden Indikatorfunktionen

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_{\{S_n \leq S_n^*\}} &= \mathbb{1}_{\{S_n \leq S_n^*, S_1 \leq S_1^*\}} + \dots + \mathbb{1}_{\{S_n \leq S_n^*, S_1 > S_1^*, \dots, S_{n-2} > S_{n-2}^*, S_{n-1} \leq S_{n-1}^*\}} \\ &\quad + \mathbb{1}_{\{S_n \leq S_n^*, S_1 > S_1^*, \dots, S_{n-2} > S_{n-2}^*, S_{n-1} > S_{n-1}^*\}}\end{aligned}$$

und daraus

$$\begin{aligned}e^{-rt_n} \mathbb{E}^* \left[(K - S_n) \mathbb{1}_{\{S_1 > S_1^*, \dots, S_{n-2} > S_{n-2}^*, S_{n-1} > S_{n-1}^*, S_n \leq S_n^*\}} \mid S_0 \right] \\ = e^{-rt_n} \mathbb{E}^* \left[(K - S_n) \mathbb{1}_{\{S_n \leq S_n^*\}} \mid S_0 \right] \\ - e^{-rt_1} \mathbb{E}^* \left[e^{-r(t_n - t_1)} (K - S_n) \mathbb{1}_{\{S_n \leq S_n^*\}} \mathbb{1}_{\{S_1 \leq S_1^*\}} \mid S_0 \right] \\ - e^{-rt_2} \mathbb{E}^* \left[e^{-r(t_n - t_2)} (K - S_n) \mathbb{1}_{\{S_n \leq S_n^*\}} \mathbb{1}_{\{S_1 > S_1^*, S_2 \leq S_2^*\}} \mid S_0 \right] \\ \vdots \\ - e^{-rt_{n-1}} \mathbb{E}^* \left[e^{-r(t_n - t_{n-1})} (K - S_n) \mathbb{1}_{\{S_n \leq S_n^*\}} \times \right. \\ \left. \times \mathbb{1}_{\{S_1 > S_1^*, \dots, S_{n-2} > S_{n-2}^*, S_{n-1} \leq S_{n-1}^*\}} \mid S_0 \right].\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Turmeigenschaft der bedingten Erwartung folgt weiter

$$\begin{aligned}e^{-rt_n} \mathbb{E}^* \left[(K - S_n) \mathbb{1}_{\{S_1 > S_1^*, \dots, S_{n-2} > S_{n-2}^*, S_{n-1} > S_{n-1}^*, S_n \leq S_n^*\}} \mid S_0 \right] \\ = e^{-rt_n} \mathbb{E}^* \left[(K - S_n) \mathbb{1}_{\{S_n \leq S_n^*\}} \mid S_0 \right] \\ - e^{-rt_1} \mathbb{E}^* \left[e^{-r(t_n - t_1)} \mathbb{E}^* \left[(K - S_n) \mathbb{1}_{\{S_n \leq S_n^*\}} \mid S_1 \right] \mathbb{1}_{\{S_1 \leq S_1^*\}} \mid S_0 \right] \\ - e^{-rt_2} \mathbb{E}^* \left[e^{-r(t_n - t_2)} \mathbb{E}^* \left[(K - S_n) \mathbb{1}_{\{S_n \leq S_n^*\}} \mid S_2 \right] \mathbb{1}_{\{S_1 > S_1^*, S_2 \leq S_2^*\}} \mid S_0 \right] \\ \vdots \\ - e^{-rt_{n-1}} \mathbb{E}^* \left[e^{-r(t_n - t_{n-1})} \mathbb{E}^* \left[(K - S_n) \mathbb{1}_{\{S_n \leq S_n^*\}} \mid S_{n-1} \right] \times \right. \\ \left. \times \mathbb{1}_{\{S_1 > S_1^*, \dots, S_{n-2} > S_{n-2}^*, S_{n-1} \leq S_{n-1}^*\}} \mid S_0 \right].\end{aligned}$$

Die inneren Erwartungswerte

$$e^{-r(t_n - t_i)} \mathbb{E}^* \left[(K - S_n) \mathbb{1}_{\{S_n \leq S_n^*\}} \mid S_i \right], \quad i = 1, \dots, n-1$$

entsprechen nach (1.69) den Preisen europäischer Put-Optionen. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
 & e^{-rt_n} \mathbb{E}^* \left[(K - S_n) \mathbb{1}_{\{S_1 > S_1^*, \dots, S_{n-2} > S_{n-2}^*, S_{n-1} > S_{n-1}^*, S_n \leq S_n^*\}} \mid S_0 \right] \\
 &= p^E(S, T) \\
 &\quad - e^{-rt_1} \mathbb{E}^* \left[p^E(S_1, T_1) \mathbb{1}_{\{S_1 \leq S_1^*\}} \mid S_0 \right] \\
 &\quad - e^{-rt_2} \mathbb{E}^* \left[p^E(S_2, T_2) \mathbb{1}_{\{S_1 > S_1^*, S_2 \leq S_2^*\}} \mid S_0 \right] \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad - e^{-rt_{n-1}} \mathbb{E}^* \left[p^E(S_{n-1}, T_{n-1}) \mathbb{1}_{\{S_1 > S_1^*, \dots, S_{n-2} > S_{n-2}^*, S_{n-1} \leq S_{n-1}^*\}} \mid S_0 \right], \tag{1.70}
 \end{aligned}$$

wobei $T_i = T - t_i$ ist.

Der Ausdruck

$$e^{-rt_n} \mathbb{E}^* \left[(K - S_n) \mathbb{1}_{\{S_1 > S_1^*, \dots, S_{n-2} > S_{n-2}^*, S_{n-1} > S_{n-1}^*, S_n \leq S_n^*\}} \mid S_0 \right]$$

entspricht dem letzten Summanden in der Summe (1.9). Wir setzen somit (1.70) in (1.9) ein und erhalten den ersten Teil der Behauptung.

Der zweite Teil folgt aus der Definition des kritischen Preises S_k^* und der Tatsache, dass die Funktion $S + p^E(S, T)$ monoton steigend in S ist. Denn auf der Menge $\{S_k \leq S_k^*\}$ gilt

$$S_k + p^E(S_k, T_k) \leq S_k^* + p^E(S_k^*, T_k) \leq S_k^* + P_{n-k}^{(n)}(S_k^*, T_k) = K.$$

Somit ist jeder Summand in $e_n^{(n)}(S, T)$ nicht negativ, woraus $e_n^{(n)}(S, T) \geq 0$ folgt. \square

Die Größe $e_n^{(n)}(S, T)$ wird als Early-Exercise-Prämie einer n -Bermuda-Put-Option bezeichnet.

Wir fassen zusammen:

$$\begin{aligned}
 e^A(S, T) &= \mathbb{E}^* \left[\int_0^T e^{-ru} r K \mathbb{1}_{\{S_u < S_u^*\}} du \mid S_0 \right], \\
 e_n^{(n)}(S, T) &= \mathbb{E}^* \left[\sum_{k=1}^{n-1} e^{-rt_k} (K - S_k - p^E(S_k, T_k)) \mathbb{1}_{\{S_1 > S_1^*, \dots, S_{k-1} > S_{k-1}^*, S_k \leq S_k^*\}} \mid S_0 \right]. \tag{1.71}
 \end{aligned}$$

Folgerung 1.38. Aus der Konvergenz der Preise von amerikanischen und n -Bermuda-Put-Optionen folgt die Konvergenz von Early-Exercise-Prämien

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e_n^{(n)}(S, T) = e^A(S, T). \quad (1.72)$$

Bemerkung 1.39. Die Konvergenz der Early-Exercise-Prämie einer n -Bermuda-Put-Option gegen die Early-Exercise-Prämie einer amerikanischen Put-Option ist leider nicht direkt sichtbar. Darüber hinaus ist der Erwartungswert in (1.71) aufgrund des k -ten Summanden

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}^* \left[e^{-rt_k} p^E(S_k, T_k) \mathbb{1}_{\{S_1 > S_1^*, \dots, S_{k-1} > S_{k-1}^*, S_k \leq S_k^*\}} \mid S_0 \right] \\ &= \mathbb{E}^* \left[e^{-rT} K N \left(\frac{\log \frac{S_k}{K} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) T_k}{\sigma \sqrt{T_k}} \right) \mathbb{1}_{\{S_1 > S_1^*, \dots, S_{k-1} > S_{k-1}^*, S_k \leq S_k^*\}} + \right. \\ & \quad \left. + e^{-rt_k} S_k N \left(\frac{\log \frac{S_k}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) T_k}{\sigma \sqrt{T_k}} \right) \mathbb{1}_{\{S_1 > S_1^*, \dots, S_{k-1} > S_{k-1}^*, S_k \leq S_k^*\}} \mid S_0 \right] \end{aligned}$$

analytisch nicht handhabbar (vgl. [55]).

Aus diesen Gründen wollen wir im nächsten Abschnitt eine alternative Darstellung für die Early-Exercise-Prämie einer n -Bermuda-Put-Option herleiten.

1.4.2. Alternative Darstellung für die Early-Exercise-Prämie einer n -Bermuda-Put-Option

Auf der Suche nach einer neuen Darstellung für die Early-Exercise-Prämie lassen wir uns von Kim [71] inspirieren. In seiner Arbeit hat er eine Formel für die Early-Exercise-Prämie einer n -Bermuda-Put-Option induktiv hergeleitet und die Konvergenz gegen die amerikanische Early-Exercise-Prämie untersucht. Wir verfolgen hier den gleichen Ansatz mit der Ausnahme, dass die Formel für die Early-Exercise-Prämie einer n -Bermuda-Put-Option direkt aus Formel (1.68) (Iwaki-Kijima-Yoshida-Darstellung für die Early-Exercise-Prämie einer n -Bermuda-Put-Option) hergeleitet wird. Zusätzlich wird der von Kim [71] nicht weiter spezifizierte Fehlerterm¹ für $n \in \mathbb{N}$ explizit dargestellt und eine Abschätzung für diesen vorgeschlagen.

Zuletzt werden einige Eigenschaften des approximativen Preises einer n -Bermuda-Put-Option $\hat{P}_n^{(n)}$ (siehe Definition unten) aufgelistet. Insbesondere wird das Verhalten von $\hat{P}_n^{(n)}$ in Abhängigkeit des kritischen Randes untersucht.

Ebenso wie an früheren Stellen dieser Arbeit seien $\mathcal{Z}_n := \{0 = t_0, t_1, \dots, t_n = T\}$ eine Zerlegung des Intervalls $[0, T]$ und $T_i := T - t_i$ für $i = 0, 1, \dots, n$. Aus dem vorherigen Abschnitt folgt für die Darstellung von n und $(n-1)$ -Bermuda-Put-Optionen

$$P_n^{(n)}(S_0, T_0) = p^E(S_0, T_0) + e_n^{(n)}(S_0, T_0) \quad (1.73)$$

und

$$P_{n-1}^{(n)}(S_1, T_1) = p^E(S_1, T_1) + e_{n-1}^{(n)}(S_1, T_1) \quad (1.74)$$

mit

$$\begin{aligned} e_n^{(n)}(S_0, T_0) &= \sum_{k=1}^{n-1} e^{-r(t_k - t_0)} \mathbb{E}^* \left[(K - S_k - p^E(S_k, T_k)) \mathbb{1}_{\{S_1 > S_1^*, \dots, S_{k-1} > S_{k-1}^*, S_k \leq S_k^*\}} \mid S_0 \right] \\ e_{n-1}^{(n)}(S_1, T_1) &= \sum_{k=2}^{n-1} e^{-r(t_k - t_1)} \mathbb{E}^* \left[(K - S_k - p^E(S_k, T_k)) \mathbb{1}_{\{S_2 > S_2^*, \dots, S_{k-1} > S_{k-1}^*, S_k \leq S_k^*\}} \mid S_1 \right]. \end{aligned}$$

Das Einsetzen von $p^E(S_1, T_1)$ in Gleichung (1.73) liefert

$$\begin{aligned} P_n^{(n)}(S_0, T_0) &= p^E(S_0, T_0) + e^{-r(t_1 - t_0)} \mathbb{E}^* \left[\left(K - S_1 - P_{n-1}^{(n)}(S_1, T_1) \right) \mathbb{1}_{\{S_1 \leq S_1^*\}} \mid S_0 \right] \\ &\quad + e^{-r(t_1 - t_0)} \mathbb{E}^* \left[e_{n-1}^{(n)}(S_1, T_1) \mid S_0 \right], \end{aligned}$$

¹Kim [71] hat den Fehlerterm als $\mathcal{O}(n\Delta t)$ bezeichnet und behauptet, dieser würde bei wachsendem n beliebig klein werden. Einen präzisen mathematischen Beweis hierfür oder einen Hinweis darauf, warum es zutrifft, konnten wir in seiner Arbeit allerdings nicht finden.

wobei wir die Turmeigenschaft der bedingten Erwartung und die folgende Zerlegung

$$1 = \mathbb{1}_{\{S_1 \leq S_1^*\}} + \mathbb{1}_{\{S_1 > S_1^*\}}$$

verwendet haben.

Im nächsten Schritt wird die europäische Put-Option $p^E(S_2, T_2)$ als Differenz der $(n-2)$ -Bermuda-Put-Option und der Early-Exercise-Prämie zur Zeit t_2 aufgefasst

$$p^E(S_2, T_2) = P_{n-2}^{(n)}(S_2, T_2) - e_{n-2}^{(n)}(S_2, T_2)$$

und in die Early-Exercise-Prämie $e_{n-1}^{(n)}(S_1, T_1)$ eingesetzt. Diese Rekursion wird insgesamt $n-1$ mal durchgeführt, so dass wir am Ende eine neue Darstellung für die Early-Exercise-Prämie und somit auch für den Preis einer n -Bermuda-Put-Option gewinnen

$$\begin{aligned} P_n^{(n)}(S_0, T) &= \sum_{k=1}^n e^{-rt_k} \mathbb{E}^* \left[\left(K - S_k - P_{n-k}^{(n)}(S_k, T_k) \right) \mathbb{1}_{\{S_k \leq S_k^*\}} \mid S_0 \right] \\ &= p^E(S_0, T) + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} e^{-rt_k} \mathbb{E}^* \left[\left(K - S_k - P_{n-k}^{(n)}(S_k, T_k) \right) \mathbb{1}_{\{S_k \leq S_k^*\}} \mid S_0 \right]}_{:= e_n^{(n)}(S_0, T)}. \end{aligned} \quad (1.75)$$

Dabei haben wir $t_0 = 0$, $T = T_0$ und die Konvention $P_0^{(n)} = 0$ verwendet.

Bemerkung 1.40. Diese Darstellung kann alternativ auch mit einer ähnlichen Vorgehensweise wie der von Leisen in [80] erhalten werden:

$$\begin{aligned} e_n^{(n)} &= P_n^{(n)}(S_0, T) - p^E(S_0, T) \\ &= P_n^{(n)}(S_0, T) - e^{-rt_{n-1}} \mathbb{E}^* \left[P_1^{(n)}(S_{n-1}, T_{n-1}) \mid S_0 \right] \\ &= \mathbb{E}^* \left[\sum_{k=0}^{n-2} e^{-rt_k} \mathbb{E}^* \left[P_{n-k}^{(n)}(S_k, T_k) - e^{-r(t_{k+1}-t_k)} P_{n-(k+1)}^{(n)}(S_{k+1}, T_{k+1}) \mid S_k \right] \mid S_0 \right] \\ &= \mathbb{E}^* \left[\sum_{k=0}^{n-2} e^{-rt_{k+1}} \mathbb{E}^* \left[\left(K - S_{k+1} - P_{n-(k+1)}^{(n)}(S_{k+1}, T_{k+1}) \right) \mathbb{1}_{\{S_{k+1} \leq S_{k+1}^*\}} \mid S_k \right] \mid S_0 \right] \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} e^{-rt_k} \mathbb{E}^* \left[\left(K - S_k - P_{n-k}^{(n)}(S_k, T_k) \right) \mathbb{1}_{\{S_k \leq S_k^*\}} \mid S_0 \right], \end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt folgende Zerlegung von $P_{n-k}^{(n)}(S_k, T_k)$

$$\begin{aligned} P_{n-k}^{(n)}(S_k, T_k) &= e^{-r(t_{k+1}-t_k)} \mathbb{E}^* \left[(K - S_{k+1}) \mathbb{1}_{\{S_{k+1} \leq S_{k+1}^*\}} \mid S_k \right] \\ &\quad + e^{-r(t_{k+1}-t_k)} \mathbb{E}^* \left[P_{n-(k+1)}^{(n)}(S_{k+1}, T_{k+1}) \mathbb{1}_{\{S_{k+1} > S_{k+1}^*\}} \mid S_k \right] \end{aligned}$$

verwendet haben.

Auf der Menge $\{S_k \leq S_k^*\}$ ist $K - S_k \geq P_{n-k}^{(n)}(S_k, T_k)$, woraus bereits die zuvor gezeigte Positivität von $e_n^{(n)}$ folgt. Die Konvergenz gegen die amerikanische Early-Exercise-Prämie e^A ist allerdings noch nicht erkennbar. Dazu zerlegen wir die Early-Exercise-Prämie einer n -Bermuda-Put-Option in zwei weitere Komponenten und zwar in

$$e_n^{(n)}(S_0, T) = \tilde{e}_n^{(n)}(S_0, T) + R_n^{(n)}(S_0, T)$$

mit

$$\tilde{e}_n^{(n)}(S_0, T) = \sum_{k=1}^{n-1} e^{-rt_k} \left(1 - e^{-r(t_{k+1}-t_k)} \right) K \mathbb{E}^* \left[\mathbb{1}_{\{S_k \leq S_k^*\}} \mid S_0 \right] \quad (1.76)$$

und

$$R_n^{(n)}(S_0, T) = \sum_{k=1}^{n-1} e^{-rt_k} \mathbb{E}^* \left[\left(e^{-r(t_{k+1}-t_k)} K - S_k - P_{n-k}^{(n)}(S_k, T_k) \right) \mathbb{1}_{\{S_k \leq S_k^*\}} \mid S_0 \right].$$

Der Term $\tilde{e}_n^{(n)}(S_0, T)$ lässt sich schreiben als¹

$$\tilde{e}_n^{(n)}(S_0, T) = \sum_{k=1}^{n-1} e^{-rt_k} r(t_{k+1} - t_k) K \mathbb{E}^* \left[\mathbb{1}_{\{S_k \leq S_k^*\}} \mid S_0 \right] + \mathcal{O}(\Delta t), \quad (1.77)$$

was nichts anderes als die diskrete Version der amerikanischen Early-Exercise-Prämie ist.

Zur Erinnerung

$$e^A(S_0, T) = \int_0^T e^{-ru} r K \mathbb{E}^* \left[\mathbb{1}_{\{S_u < S_u^*\}} \mid S_0 \right] du.$$

Mit wachsendem n und einer immer feiner werdenden Zerlegung strebt somit $\tilde{e}_n^{(n)}(S_0, T)$ gegen $e^A(S_0, T)$.

¹Die Taylor-Entwicklung des Terms $1 - e^{-r(t_{k+1}-t_k)} = r(t_{k+1} - t_k) + \mathcal{O}(\Delta t^2)$. Δt in (1.77) ist $\Delta t := \max_k \{t_{k+1} - t_k\}$.

Für $P_{n-k}^{(n)}(S_k, T_k)$ gilt weiterhin

$$\begin{aligned}
P_{n-k}^{(n)}(S_k, T_k) &= e^{-r(t_{k+1}-t_k)} \mathbb{E}^* \left[(K - S_{k+1}) \mathbb{1}_{\{S_{k+1} \leq S_{k+1}^*\}} \mid S_k \right] \\
&\quad + e^{-r(t_{k+1}-t_k)} \mathbb{E}^* \left[P_{n-(k+1)}^{(n)}(S_{k+1}, T_{k+1}) \mathbb{1}_{\{S_{k+1} > S_{k+1}^*\}} \mid S_k \right] \\
&= e^{-r(t_{k+1}-t_k)} K - S_k \\
&\quad - e^{-r(t_{k+1}-t_k)} \mathbb{E}^* \left[\left(K - S_{k+1} - P_{n-(k+1)}^{(n)}(S_{k+1}, T_{k+1}) \right) \mathbb{1}_{\{S_{k+1} > S_{k+1}^*\}} \mid S_k \right].
\end{aligned}$$

Womit für den Restterm (bzw. Fehlerterm) $R_n^{(n)}(S_0, T)$ gilt

$$\begin{aligned}
R_n^{(n)}(S_0, T) &= \sum_{k=1}^{n-1} e^{-rt_{k+1}} \mathbb{E}^* \left[\left(K - S_{k+1} - P_{n-(k+1)}^{(n)}(S_{k+1}, T_{k+1}) \right) \mathbb{1}_{\{S_k \leq S_k^*\}} \mathbb{1}_{\{S_{k+1} > S_{k+1}^*\}} \mid S_0 \right].
\end{aligned} \tag{1.78}$$

Nach Definition von S_{k+1}^* gilt

$$\left(K - S_{k+1} - P_{n-(k+1)}^{(n)}(S_{k+1}, T_{k+1}) \right) \mathbb{1}_{\{S_{k+1} > S_{k+1}^*\}} < 0,$$

woraus folgt, dass der Fehlerterm $R_n^{(n)}(S_0, T)$ negativ für alle $n \geq 2$ ist.

Aus der Zusammensetzung des Fehlerterms $R_n^{(n)}(S_0, T)$ in (1.78) ist erkennbar, dass dieser bei einer wachsenden Anzahl an Ausübungsmöglichkeiten gegen Null strebt. Denn einerseits ist $K - S_{k+1} - P_{n-(k+1)}^{(n)}(S_{k+1}, T_{k+1})$ eine stetige Funktion von S_{k+1} , die in einer kleinen Umgebung von S_{k+1}^* , nach der Definition des kritischen Preises S_{k+1}^* , ungefähr null ist. Andererseits fällt die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(S_k \leq S_k^*, S_{k+1} > S_{k+1}^*)$ ebenso gering aus, vor allem wenn S_k deutlich kleiner als S_k^* ist (zur Erinnerung $S_k^* \leq S_{k+1}^*$). Beide Ausdrücke haben darüber hinaus sogar einen gegenläufigen Effekt. Auf der Menge, auf der ein Ausdruck groß wird, wird der andere klein und umgekehrt.

Eine Nullfolge als obere Schranke für den Betrag des k -ten Summanden des Fehlerterms $R_n^{(n)}$ ist beispielsweise $K(1 - e^{-r\Delta_n})$. Die Frage ob der Term $R_n^{(n)}$ selbst eine Nullfolge ist, bleibt noch zu klären.

Es ist uns leider nicht gelungen für den Fehlerterm $R_n^{(n)}(S_0, T)$ eine bessere Ordnung als $\mathcal{O}(\sqrt{\Delta_n})$ auf direktem Weg zu erhalten. Vielmehr wurde die Ordnung $\mathcal{O}(\sqrt{\Delta_n})$ indirekt mit Hilfe von Satz 1.24 hergeleitet. Aus diesem Grund wird weiter unten nur der „indirekte“ Weg vorgestellt.

Nach Satz 1.24 gilt

$$0 \leq P^A - \widehat{P}_n^{(n)} - R_n^{(n)} \leq K (1 - e^{-r\Delta_n}),$$

wobei $\widehat{P}_n^{(n)} + R_n^{(n)}$ der Preis einer n -Bermuda-Put-Option ist und $\widehat{P}_n^{(n)} = p^E + \widetilde{e}_n^{(n)}$, mit $\widetilde{e}_n^{(n)}$ definiert in (1.76) ist. Weiterhin folgt für den Restterm $R_n^{(n)}$

$$0 \geq R_n^{(n)} \geq -K (1 - e^{-r\Delta_n}) + \left(P^A - \widehat{P}_n^{(n)} \right) \mathbb{1}_{\{P^A - \widehat{P}_n^{(n)} \leq 0\}}, \quad (1.79)$$

mit

$$\mathbb{1}_{\{P^A - \widehat{P}_n^{(n)} \leq 0\}} = \begin{cases} 1 & P^A - \widehat{P}_n^{(n)} \leq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Lemma 1.41. *Es sei die Zerlegung (Menge der Ausübungsmöglichkeiten) \mathcal{Z}_n von $[0, T]$ äquidistant mit Schrittweite Δ_n . Auf der Menge $\{P^A - \widehat{P}_n^{(n)} \leq 0\}$ gilt*

$$\left| P^A - \widehat{P}_n^{(n)} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} K (1 - e^{-r\Delta_n}) \left(\left| r - \frac{\sigma^2}{2} \right| \sqrt{T} + C \frac{2(2 + \sqrt{T})}{\sqrt{\Delta_n}} \right), \quad (1.80)$$

mit $C := \max \left\{ |\log K|, |\log S_0|, \sigma K \sqrt{\frac{e^{rT}}{rN(-\frac{r}{\sigma}\sqrt{T})}} \right\}$ und

$$\widehat{P}_n^{(n)}(S_0, T) = p^E(S_0, T) + \sum_{k=1}^{n-1} e^{-rt_k} \left(1 - e^{-r(t_{k+1} - t_k)} \right) K \mathbb{E}^* \left[\mathbb{1}_{\{S_k \leq S_{k,(n)}^*\}} \mid S_0 \right].$$

Beweis. Für den Preis einer amerikanischen Put-Option P^A gilt (vgl. [20], [96])

$$P^A(S_0, T) = p^E(S_0, T) + \int_0^T e^{-ru} r K \mathbb{E}^* [\mathbb{1}_{\{S_u \leq S_u^*\}} \mid S_0] du. \quad (1.81)$$

Da der kritische Rand einer amerikanischen Put-Option stetig ist (vgl. [96]), existiert ein $\xi_k \in (t_k, t_{k+1})$, so dass gilt

$$\begin{aligned} P^A &= p^E + \sum_{k=0}^{n-1} r K \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{-ru} \mathbb{E}^* [\mathbb{1}_{\{S_u \leq S_u^*\}} \mid S_0] du \\ &= p^E + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}^* [\mathbb{1}_{\{S_{\xi_k} \leq S_{\xi_k}^*\}} \mid S_0] r K \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{-ru} du \end{aligned}$$

$$\geq p^E + \sum_{k=0}^{n-1} e^{-rt_k} \left(1 - e^{-r(t_{k+1}-t_k)}\right) K \mathbb{E}^* \left[\mathbb{1}_{\{S_{\xi_k} \leq S_k^*\}} \mid S_0 \right] := \widehat{P}^A. \quad (1.82)$$

Dabei gilt die letzte Ungleichung wegen der Monotonie des kritischen Randes einer amerikanischen Put-Option (vgl. [96]). Wir haben $S_{\xi_k}^*$ zur Zeit ξ_k durch den kritischen Rand S_k^* zur Zeit $t_k < \xi_k$ ersetzt.

Nun gilt auf der Menge $\left\{P^A - \widehat{P}_n^{(n)} \leq 0\right\}$

$$\begin{aligned} \left|P^A - \widehat{P}_n^{(n)}\right| &\leq \left|\widehat{P}^A - \widehat{P}_n^{(n)}\right| \\ &\leq K \left(1 - e^{-r\Delta_n}\right) \sum_{k=1}^{n-1} e^{-rt_k} \left| \mathbb{E}^* \left[\mathbb{1}_{\{S_{\xi_k} \leq S_k^*\}} - \mathbb{1}_{\{S_k \leq S_{k,(n)}^*\}} \mid S_0 \right] \right| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} K \left(1 - e^{-r\Delta_n}\right) \sum_{k=1}^{n-1} \left| d_2(S_0, S_{k,(n)}^*, t_k) - d_2(S_0, S_k^*, \xi_k) \right|, \end{aligned} \quad (1.83)$$

wobei

$$d_2(S_1, S_2, \tau) = \frac{\log \frac{S_1}{S_2} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \tau}{\sigma \sqrt{\tau}}.$$

Für den Betrag in (1.83) können wir die folgende Abschätzung gewinnen

$$\begin{aligned} \left| d_2(S_0, S_{k,(n)}^*, t_k) - d_2(S_0, S_k^*, \xi_k) \right| &\leq \left| \frac{\log S_k^* - \log S_{k,(n)}^*}{\sigma \sqrt{t_k}} \right| + \left| \frac{r - \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma} \right| \left(\sqrt{t_{k+1}} - \sqrt{t_k} \right) \\ &\quad + \frac{2C_1}{\sigma} \frac{\sqrt{t_{k+1}} - \sqrt{t_k}}{t_k}, \end{aligned} \quad (1.84)$$

mit $C_1 := \max\{|\log K|, |\log S_0|\}$.

Mit Abschätzung (1.49) für die kritischen Ränder gilt weiter

$$\left| \frac{\log S_k^* - \log S_{k,(n)}^*}{\sigma \sqrt{t_k}} \right| \leq \frac{C_2}{\sigma} \frac{\sqrt{\Delta_n}}{\sqrt{t_k}}, \quad (1.85)$$

mit

$$C_2 := \sigma K \sqrt{\frac{e^{rT}}{rN\left(-\frac{r}{\sigma}\sqrt{T}\right)}}. \quad (1.86)$$

Das Einsetzen von (1.85) und (1.84) in die Summe (1.83) führt insgesamt zu der Abschätzung

$$\left|P^A - \widehat{P}_n^{(n)}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} K (1 - e^{-r\Delta_n}) \left(\left| r - \frac{\sigma^2}{2} \right| \sqrt{T} + C \frac{2(2 + \sqrt{T})}{\sqrt{\Delta_n}} \right),$$

mit $C := \max\{C_1, C_2\}$. □

Bemerkung 1.42. Nach dem Ergebnis von Lemma 1.41 folgt somit, dass der Fehlerterm $R_n^{(n)}$ von der Ordnung $\mathcal{O}(\sqrt{\Delta_n})$ ist. Die Auswertung der numerischen Simulationen (siehe auch Kapitel 4) lassen jedoch auf die Ordnung $\mathcal{O}(\Delta_n)$ schließen. Auf der Menge $\{S_0 \leq \widehat{S}_0^*\}$ zum Beispiel, wobei \widehat{S}_0^* eine Lösung von $K - S_0^* = \widehat{P}_n^{(n)}(\widehat{S}_0^*, T)$ ist¹, lässt sich die Ordnung $\mathcal{O}(\Delta_n)$ sogar direkt nachweisen. Denn in diesem Fall verschwindet der Term mit der Indikatorfunktion in der Ungleichung (1.79) aufgrund von $P^A(S_0) - \widehat{P}_n^{(n)}(S_0) \geq 0$ und es bleiben somit nur die Terme der Ordnung $\mathcal{O}(\Delta_n)$ übrig.

Die vor Lemma 1.41 hergeleitete Early-Exercise-Prämie-Darstellung des Preises einer n -Bermuda-Put-Option halten wir aus Vollständigkeitsgründen im nächsten Satz fest.

Satz 1.43. *Der Preis einer n -Bermuda-Put-Option $P_n^{(n)}(S_0, T)$ mit den Ausübungsmöglichkeiten $0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \dots < t_n^{(n)} = T$ kann als eine europäische Put-Option zuzüglich der Early-Exercise-Prämie und abzüglich² des Fehlerterms dargestellt werden*

$$P_n^{(n)}(S_0, T) = p^E(S_0, T) + \widetilde{e}_n^{(n)}(S_0, T) + R_n^{(n)}(S_0, T). \quad (1.87)$$

Dabei ist die Early-Exercise-Prämie definiert durch

$$\widetilde{e}_n^{(n)}(S_0, T) = \sum_{k=1}^{n-1} e^{-rt_k} \left(1 - e^{-r(t_{k+1} - t_k)}\right) K \mathbb{E}^* \left[\mathbb{1}_{\{S_k \leq S_k^*\}} \mid S_0 \right]$$

und der Fehlerterm durch

$$\begin{aligned} R_n^{(n)}(S_0, T) &= \sum_{k=1}^{n-1} e^{-rt_{k+1}} \mathbb{E}^* \left[\left(K - S_{k+1} - P_{n-(k+1)}^{(n)}(S_{k+1}, T_{k+1}) \right) \mathbb{1}_{\{S_k \leq S_k^*\}} \mathbb{1}_{\{S_{k+1} > S_{k+1}^*\}} \mid S_0 \right]. \end{aligned}$$

¹Die Existenz der Lösung folgt aus $\widehat{P}_n^{(n)}(0) < K$ und $\widehat{P}_n^{(n)} > 0$.

²Der Ausdruck „abzüglich“ wird an dieser Stelle wegen $R_n^{(n)} < 0$ für alle $n \geq 2$ verwendet.

Feststellung 1.44. Der Preis einer $(n - i)$ -Bermuda-Put-Option mit den Ausübungsmöglichkeiten in t_{i+1}, \dots, t_n und der Dauer $T_i := T - t_i$ beträgt zur Zeit t_i

$$P_{n-i}^{(n)}(S_i, T_i) = p^E(S_i, T_i) + \tilde{e}_{n-i}^{(n)}(S_i, T_i) + R_{n-i}^{(n)}(S_i, T_i), \quad (1.88)$$

mit

$$\tilde{e}_{n-i}^{(n)}(S_i, T_i) = \sum_{k=i+1}^{n-1} e^{-r(t_k - t_i)} \left(1 - e^{-r(t_{k+1} - t_k)}\right) K \mathbb{E}^* \left[\mathbb{1}_{\{S_k \leq S_k^*\}} \mid S_i \right],$$

$$R_{n-i}^{(n)}(S_i, T_i)$$

$$= \sum_{k=i+1}^{n-1} e^{-r(t_{k+1} - t_i)} \mathbb{E}^* \left[\left(K - S_{k+1} - P_{n-(k+1)}^{(n)}(S_{k+1}, T_{k+1}) \right) \mathbb{1}_{\{S_k \leq S_k^*\}} \mathbb{1}_{\{S_{k+1} > S_{k+1}^*\}} \mid S_i \right].$$

Der kritische Preis S_i^* zur Zeit t_i ist dabei definiert durch

$$K - S_i^* = p^E(S_i^*, T_i) + \tilde{e}_{n-i}^{(n)}(S_i^*, T_i) + R_{n-i}^{(n)}(S_i^*, T_i). \quad (1.89)$$

Bemerkung 1.45. Der Preis einer $(n - i)$ -Bermuda-Put-Option nach Formel (1.88) wird weiterhin, wie in der Arbeit von Geske und Johnson [41], rekursiv berechnet. Das heißt, dass zunächst der kritische Preis S_{n-1}^* zur Zeit t_{n-1} aus der Gleichung

$$K - S_{n-1}^* = p^E(S_{n-1}^*, T_{n-1})$$

bestimmt wird. Danach wird mit Hilfe von S_{n-1}^* der Put-Preis $P_2^{(n)}(S_{n-2}, T_{n-2})$ ermittelt. Diese Prozedur wird induktiv bis zum Zeitpunkt t_i fortgesetzt.

Der Vorteil von Formel (1.88) gegenüber der Geske-Johnson-Formel (1.25) besteht jedoch darin, dass die mehrdimensionalen Integrale ($\text{Dim} > 2$) nur im letzten Term, also dem Fehlerterm, vorkommen. Da der Fehlerterm mit wachsendem n gegen 0 konvergiert, kann dieser bei der Berechnung des Preises einer amerikanischen Put-Option vernachlässigt und der Preis einer $(n - i)$ -Bermuda-Put-Option durch den approximativen Preis $\hat{P}_{n-i}^{(n)}(S_i, T_i)$ ersetzt werden. Es gilt

$$\hat{P}_{n-i}^{(n)}(S_i, T_i) = p^E(S_i, T_i) + \sum_{k=i+1}^{n-1} e^{-r(t_k - t_i)} \left(1 - e^{-r(t_{k+1} - t_k)}\right) K \mathbb{E}^* \left[\mathbb{1}_{\{S_k \leq \hat{S}_k^*\}} \mid S_i \right]. \quad (1.90)$$

Dabei werden die approximativen kritischen Preise \hat{S}_i^* für $i = n - 1, \dots, 0$ rekursiv, ausgehend von der Startbedingung $\hat{S}_n^* = K$, aus der Gleichung

$$K - \widehat{S}_i^* = p^E(\widehat{S}_i^*, T_i) + \widehat{e}_{n-i}^{(n)}(\widehat{S}_i^*, T_i) \quad (1.91)$$

bestimmt. Auf diese Weise wird die Schwierigkeit der Auswertung mehrdimensionaler Normalverteilungen vermieden.

Bemerkung 1.46. Huang et al. [51] haben die Formeln (1.90), (1.91) für die approximative Berechnung einer amerikanischen Put-Option verwendet. Trotz der um den Fehlerterm bereinigten Formeln bleibt die Berechnung des approximativen Preises $\widehat{P}_n^{(n)}(S_i, T_i)$ für große n , nach Aussage von Huang et al. [51], rechenintensiv. Daher verfolgen sie, ebenso wie Geske und Johnson, den Ansatz die Richardson-Extrapolation nach der Berechnung der ersten Folgenglieder der Folge $\widehat{P}_n^{(n)}$ anzuwenden.

Allerdings ignorieren sie dabei die folgende Problematik. Obwohl $P_n^{(n)} < P^A$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, gilt $\widehat{P}_n^{(n)} > P_n^{(n)}$ aufgrund des negativen Fehlerterms $R_n^{(n)}$. Als Folge dessen kann es vorkommen, dass $\widehat{P}_n^{(n)} > P^A$ wird¹. Auf der anderen Seite gilt insbesondere für das erste Folgenglied $\widehat{P}_1^{(1)} = p^E < P^A$. Das bedeutet, dass die Folge $\widehat{P}_n^{(n)}$ nicht monoton ist, was wiederum impliziert, dass für die Extrapolation des Grenzwertes die ersten Folgenglieder wenig geeignet sind.

Ibáñez [54] hat vorgeschlagen die Early-Exercise-Prämie bzw. den Fehlerterm so zu modifizieren², dass die Folge der approximativen Bermuda-Put-Optionen $\widehat{P}_n^{(n)}$ monoton von unten gegen die amerikanische Put-Option P^A konvergiert. Außerdem schlägt er als eine Art Faustregel vor, generell auf die ersten drei Folgenglieder zu verzichten und die Richardson-Extrapolation erst auf die folgenden Glieder der Folge anzuwenden.

Aufgrund der Tatsache, dass die Größe $\widehat{P}_n^{(n)}$ zur Berechnung des Preises einer amerikanischen Put-Option verwendet werden kann, wollen wir zuletzt einige Eigenschaften von $\widehat{P}_n^{(n)}$ auflisten. Insbesondere wollen wir das Verhalten des approximativen Preises $\widehat{P}_n^{(n)}$ in Abhängigkeit des kritischen Randes untersuchen. Der Übersicht wegen lassen wir auch hier den Index $\cdot^{(n)}$ weg.

Definition 1.47. Sei $L := (L_k)_{1 \leq k \leq n}$ eine (deterministische) Folge mit Werten in $[0, K]$. Wir definieren

$$\widehat{P}_n(S_0, T; L, \mathcal{Z}_n) = p^E(S_0, L_n, T) + \sum_{k=1}^{n-1} e^{-rt_k} \left(1 - e^{-r(t_{k+1}-t_k)}\right) L_n \mathbb{E}^* [\mathbb{1}_{\{S_k \leq L_k\}} \mid S_0], \quad (1.92)$$

¹Dieser Fall kommt nur für $S_0 > S_0^*$ ab einem gewissen Index n vor, der von anderen Modellparametern, wie dem Zinssatz r und der Volatilität σ , abhängt.

²Der Beweis, dass die von ihm vorgeschlagene modifizierte Preisfolge monoton gegen den Preis einer amerikanischen Put-Option konvergiert, fehlt allerdings.

wobei $p^E(S_0, L_n, T)$ der Preis einer europäischen Put-Option mit dem Ausübungspreis L_n und der Laufzeit T ist. Weiterhin bezeichnet S_k den Preis einer Aktie zur Zeit t_k , modelliert durch eine geometrische Brownsche Bewegung.

Die Größe $\hat{P}_n(S_0, T; L, \mathcal{Z}_n)$ wird approximativer Preis der n -Bermuda-Put-Option zum Rand L genannt (oder kürzer approximativer Preis zum Rand L).

Bemerkung 1.48. Für $L_n = K$ und $L_k = 0$ für $k = 1, \dots, n$ ist der approximative Preis der n -Bermuda-Put-Option zum Rand L gleich dem Preis einer europäischen Put-Option p^E mit dem Ausübungspreis K und der Laufzeit T .

Lemma 1.49. Es seien $B := (B_k)_{1 \leq k \leq n}$ und $H := (H_k)_{1 \leq k \leq n}$ zwei (deterministische) Folgen mit Werten in $[0, K]$ und es gelte $B_k \leq H_k$ für $k = 1, \dots, n$. Dann gilt

$$\hat{P}_n(S_0, T; B, \mathcal{Z}_n) \leq \hat{P}_n(S_0, T; H, \mathcal{Z}_n). \quad (1.93)$$

Beweis. Der Beweis folgt direkt aus der Definition von $\hat{P}_n(S_0, T; L, \mathcal{Z}_n)$. □

Lemma 1.50. Es seien $B := (B_k)_{1 \leq k \leq n}$ und $H := (H_k)_{1 \leq k \leq n}$ zwei deterministische Folgen mit Werten in $[1, K]$ und es gelte $\max_k |H_k - B_k| \leq C(\Delta_n)^\alpha$ mit $C > 0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\left| \hat{P}_n(S_0, T; B, \mathcal{Z}_n) - \hat{P}_n(S_0, T; H, \mathcal{Z}_n) \right| \leq \frac{rK}{\sqrt{2\pi}\sigma} C(\Delta_n)^\alpha \left(3\sqrt{\Delta_n} + 2\sqrt{T} \right). \quad (1.94)$$

Beweis. Der Beweis erfolgt analog zum Beweis von Lemma 1.41. □

Bemerkung 1.51. Aus dem letzten Lemma erschließt sich, dass die Ordnung der maximalen Abweichung der Ränder sich auf den Fehler der approximativen Preise einer n -Bermuda-Put-Option überträgt. Es gilt sogar genauer, falls

$$\left| \sum_{k=1}^{n-1} N(-d_2(S_0, H_k, t_k)) - N(-d_2(S_0, B_k, t_k)) \right| = \mathcal{O}((\Delta_n)^{-\alpha})$$

ist, so gilt $\left| \hat{P}_n(S_0, T; B, \mathcal{Z}_n) - \hat{P}_n(S_0, T; H, \mathcal{Z}_n) \right| = \mathcal{O}((\Delta_n)^{1-\alpha})$.

Das Ergebnis aus Lemma 1.50 lässt sich auch auf amerikanische Put-Optionen übertragen.

Lemma 1.52. *Es seien $S^* := (S_t^*)_{t \in [0, T]}$ der kritische Rand einer amerikanischen Put-Option und $\hat{S}^* := (\hat{S}_t^*)_{t \in [0, T]}$ eine Approximation des kritischen Randes S^* mit $\hat{S}_T^* = K$. Es gilt*

$$\left| P^A(\cdot; S^*) - P^A(\cdot; \hat{S}^*) \right| \leq \frac{K\sqrt{2r}}{\sigma} \left(N(\sqrt{2rT}) - \frac{1}{2} \right) \|S^* - \hat{S}^*\|_\infty, \quad (1.95)$$

wobei $P^A(\cdot; S^*)$ durch

$$P^A(\cdot; S^*) = p^E(S_0, T) + rK \int_0^T e^{-ru} \mathbb{E}^* [\mathbb{1}_{\{S_u < S_u^*\}} \mid S_0] du$$

gegeben ist.

Beweis. Es gilt

$$\left| P^A(\cdot; S^*) - P^A(\cdot; \hat{S}^*) \right| \leq \frac{rK}{\sqrt{2\pi}\sigma} \|S^* - \hat{S}^*\|_\infty \int_0^T \frac{e^{-ru}}{\sqrt{u}} du. \quad (1.96)$$

Weiterhin gilt

$$\frac{r}{\sqrt{2\pi}} \int_0^T \frac{e^{-ru}}{\sqrt{u}} du = \frac{2r}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{T}} e^{-ru^2} du = \frac{\sqrt{2r}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{2rT}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2r} \left(N(\sqrt{2rT}) - \frac{1}{2} \right)$$

und zusammen mit (1.96) die Behauptung. □

Bemerkung 1.53. Der Term $N(\sqrt{2rT}) - 1/2$ konvergiert für $T \rightarrow 0$ gegen null. Um eine gute Approximation für den Preis einer amerikanischen Put-Option für kurze Restlaufzeiten T zu erhalten, ist es somit nicht notwendig den kritischen Rand auf $[0, T]$ „sehr genau“ zu bestimmen. Das ist insofern hilfreich, da der kritische Rand eine unendliche Steigung bei $t = T$ aufweist, was üblicherweise zu sehr großen Abweichungen in der Nähe der Fälligkeit führt.

2. Sensitivitäten der n -Bermuda-Put-Option

Der Fokus der meisten Forschungsarbeiten über Bermuda-Optionen bzw. amerikanische Optionen liegt in der Herleitung (bzw. der Approximation) des Optionspreises selbst. Ein sehr wichtiges Thema, nämlich die Bestimmung der Optionssensitivitäten (partielle Ableitungen nach Eingangsparametern) für die dynamische Absicherungsstrategien, bleibt dabei weitgehend unbehandelt. Es existieren nur wenige Arbeiten, die sich mit Sensitivitäten von Bermuda bzw. amerikanischen Optionen beschäftigen.

Die erste solche uns bekannte Arbeit ist die von Geske und Johnson [41]. Die Autoren haben darin nicht nur den analytischen Preis der n -Bermuda-Put-Option angegeben, sondern auch dessen Sensitivitäten. Leider haben sie, wie auch schon im Falle der Preisformel, auf die Beweise und fast jegliche Anmerkungen zu der Herleitung der Formeln für die Sensitivitäten des Optionspreises verzichtet. Zudem lässt sich anhand Ihrer Schreibweise die Bedeutung mancher Formeln und Bezeichnungen (vor allem der Größe w'_2) nicht eindeutig erschließen.

Das Ziel dieses Kapitels besteht darin die eben genannten Unklarheiten der Arbeit von Geske und Johnson zu beseitigen und die Richtigkeit der Formeln für die Sensitivitäten des Optionspreises zu beweisen. Das Augenmerk wird hierbei auf eine anschauliche und leicht nachzuvollziehende Darstellung gelegt.

Wie weiter unten ersichtlich wird, ist die Herleitung der Formeln keineswegs trivial, sondern relativ rechenaufwändig. Zur besseren Übersichtlichkeit führen wir daher eine eigene Notation ein und entwickeln zunächst Hilfsmittel, die uns in den darauf folgenden Abschnitten viel Arbeit ersparen werden.

2.1. Hilfssätze und Lemmata

Bekanntermaßen ist der Preis einer europäischen Put-Option im Black-Scholes-Modell zur Zeit t gegeben durch

$$p^E = e^{-r\tau} KN(-b) - SN(-a), \quad (2.1)$$

Kapitel 2. Sensitivitäten der n -Bermuda-Put-Option

mit

$$b = \frac{\log \frac{S}{K} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \tau}{\sigma \sqrt{\tau}}, \quad a = b + \sigma \sqrt{\tau}, \quad \text{und} \quad \tau := T - t. \quad (2.2)$$

Weiterhin berechnet sich die Sensitivität Delta, also die partielle Ableitung nach dem Aktienkurs, wie folgt

$$\frac{\partial p^E}{\partial S} = -N(-a).$$

Auf den ersten Blick könnte der Eindruck entstehen der Ableitungsprozess sei nicht richtig durchgeführt worden. Es scheint als wäre nur der letzte Term $-SN(-a)$ nach S abgeleitet und die anderen Ableitungen $\frac{\partial N(-b)}{\partial S}$ bzw. $\frac{\partial N(-a)}{\partial S}$ nicht berücksichtigt worden.

Das ist jedoch nicht der Fall, denn es gilt

$$K e^{-r\tau} \frac{\partial N(-b)}{\partial S} - S \frac{\partial N(-a)}{\partial S} = 0,$$

was bedeutet, dass die restlichen Ableitungen sich aufheben.

Überdies gilt sogar

$$K e^{-r\tau} \frac{\partial N(-b)}{\partial z} - S \frac{\partial N(-a)}{\partial z} = 0, \quad (2.3)$$

für $z \in \{S, K, r\}$.

Die Relation (2.3) erweist sich als sehr hilfreich bei Berechnungen der partiellen Ableitungen europäischer Vanilla-Optionen im Black-Scholes-Modell. Aus diesem Grund möchten wir in diesem Abschnitt eine ähnliche Relation für den Fall einer n -Bermuda-Put-Option herleiten. Die Formel (2.3) kann hieraus als ein Spezialfall gewonnen werden.

Die Berechnung der partiellen Ableitungen der Geske und Johnson Formel (1.10) nach allen Variablen zieht die Berechnung der partiellen Ableitungen der k -dimensionalen Standardnormalverteilungen nach sich. Dieser Schritt erfordert allerdings ein gutes Verständnis im Umgang mit mehrdimensionalen Verteilungsfunktionen der Normalverteilung. Aus diesem Grund stellen wir zunächst einige Eigenschaften und Zusammenhänge der k -dimensionalen Verteilungsfunktionen der Standardnormalverteilung zusammen.

Satz 2.1. Für eine k -dimensionale Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung N_k gilt

$$N_k(a_1, \dots, a_k; \mathbf{C}) = \int_{-\infty}^{a_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_1^2} N_{k-1}\left(\frac{a_2 - \rho_{12}x_1}{\sqrt{1 - \rho_{12}^2}}, \dots, \frac{a_k - \rho_{1k}x_1}{\sqrt{1 - \rho_{1k}^2}}; \mathbf{B}\right) dx_1, \quad (2.4)$$

wobei $\mathbf{B} = (b_{ij})_{i,j=1,\dots,k-1}$ und $\mathbf{C} = (c_{ij})_{i,j=1,\dots,k}$ symmetrische Matrizen sind, für die gilt

$$\begin{aligned} c_{11} &= 1 \\ c_{1j} &= \rho_{1j} \\ c_{i1} &= \rho_{i1} \\ c_{ij} &= \rho_{1i}\rho_{1j} + \sqrt{(1 - \rho_{1i}^2)(1 - \rho_{1j}^2)}b_{i-1,j-1}. \end{aligned}$$

Beweis. Siehe bei [108] bzw. im Anhang. □

Satz 2.2 (Verallgemeinerung des Satzes 2.1). Es gilt

$$N_k(a_1, \dots, a_k; \mathbf{C}) = \int_{-\infty}^{a_s} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_s^2} N_{k-1}\left(\frac{a_1 - \rho_{s1}x_s}{\sqrt{1 - \rho_{s1}^2}}, \overset{\text{ohne } s}{\vdots}, \frac{a_k - \rho_{sk}x_s}{\sqrt{1 - \rho_{sk}^2}}; \mathbf{B}\right) dx_s, \quad (2.5)$$

wobei $\mathbf{B} = (b_{ij})_{i,j=1,\dots,k-1}$ und $\mathbf{C} = (c_{ij})_{i,j=1,\dots,k}$ symmetrische Matrizen sind, für die gilt

$$\begin{aligned} c_{ss} &= 1 \\ c_{sj} &= \rho_{sj} \\ c_{is} &= \rho_{is} \\ c_{ij} &= \rho_{si}\rho_{sj} + \sqrt{(1 - \rho_{si}^2)(1 - \rho_{sj}^2)}b_{i,j} \quad \text{falls } i, j < s \\ c_{ij} &= \rho_{si}\rho_{sj} + \sqrt{(1 - \rho_{si}^2)(1 - \rho_{sj}^2)}b_{i,j-1} \quad \text{falls } i < s, j > s \\ c_{ij} &= \rho_{si}\rho_{sj} + \sqrt{(1 - \rho_{si}^2)(1 - \rho_{sj}^2)}b_{i-1,j} \quad \text{falls } i > s, j < s \\ c_{ij} &= \rho_{si}\rho_{sj} + \sqrt{(1 - \rho_{si}^2)(1 - \rho_{sj}^2)}b_{i-1,j-1} \quad \text{falls } i, j > s. \end{aligned}$$

Beweis. Der Beweis verläuft lediglich bis auf die Anpassung der Indizes der auftretenden Matrizen genau so, wie der Beweis des Satzes 2.1 (siehe Anhang). Hilfreich ist dabei die Tatsache, dass es gilt

$$(\mathbf{P}_{1 \leftrightarrow s} \mathbf{A} \mathbf{P}_{1 \leftrightarrow s})^{-1} = \mathbf{P}_{1 \leftrightarrow s} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{P}_{1 \leftrightarrow s},$$

mit $\mathbf{P}_{1 \leftrightarrow s}$ einer Permutationsmatrix, wobei $\mathbf{P}_{1 \leftrightarrow s} \mathbf{A}$ bzw. $\mathbf{A} \mathbf{P}_{1 \leftrightarrow s}$ den Austausch der Zeilen bzw. der Spalten 1 und s nach sich zieht. □

Bemerkung. Die Aussage von Satz 2.2 kann auch in der Arbeit von Curnow und Dunnet [28] in abgeänderter Notation gefunden werden.

Notation. In Satz 2.2 entsteht die Matrix \mathbf{B} aus der Matrix \mathbf{C} , indem die s -te Zeile und die s -te Spalte der Matrix \mathbf{C} gestrichen wird.

Insofern ist die folgende Notation angebracht: $\mathbf{B}_{1,k-1} := \mathbf{C}_{1k \setminus \{s\}}$, d.h. die Matrix \mathbf{C} ohne die s -te Zeile und die s -te Spalte.

Beispiel 2.3. $\mathbf{C}_{13} \Rightarrow \mathbf{C}_{13 \setminus \{2\}}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}}_{:=\mathbf{C}_{13}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} c_{11} & c_{13} \\ c_{31} & c_{33} \end{pmatrix}}_{:=\mathbf{C}_{13 \setminus \{2\}}}. \quad (2.6)$$

Mit dem letzten Satz kann nun das folgende Resultat gezeigt werden.

Satz 2.4. Sei N die 1-dimensionale und N_k die k -dimensionale Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. Ferner sei N_k nach z differenzierbar, dann gilt

$$\frac{dN_k(\mathbf{b}_{1k}; \mathbf{R}_{1k})}{dz} = \sum_{i=1}^k \delta_{ik} \frac{dN(b_i)}{dz} N_{k-1}(\tilde{\mathbf{b}}_{1k \setminus \{i\}}; \tilde{\mathbf{R}}_{1k \setminus \{i\}}) \quad (2.7)$$

mit

$$\delta_{ik} = \begin{cases} -1 & \text{wenn } i = k \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mathbf{b}_{1k} := (\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_{k-1}, \tilde{b}_k), \quad \tilde{b}_i = \delta_{ik} b_i, \quad i = 1, \dots, k,$$

$$\tilde{\mathbf{b}}_{1k \setminus \{i\}} = \left(\frac{\tilde{b}_1 - \rho_{i1} \tilde{b}_i}{\sqrt{1 - \rho_{i1}^2}}, \dots, \overset{\text{ohne } i}{\downarrow}, \dots, \frac{\tilde{b}_{k-1} - \rho_{i,k-1} \tilde{b}_i}{\sqrt{1 - \rho_{i,k-1}^2}}, \frac{\tilde{b}_k - \rho_{ik} \tilde{b}_i}{\sqrt{1 - \rho_{ik}^2}} \right)$$

und

$$\mathbf{R}_{1k} = \{\rho_{st} \mid s, t = 1, \dots, k\}$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_{1k \setminus \{i\}} = \left\{ \frac{\rho_{st} - \rho_{is} \rho_{it}}{\sqrt{(1 - \rho_{is}^2)(1 - \rho_{it}^2)}} \mid s, t = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, k \right\}.$$

Beweis. Der Beweis ist eine direkte Anwendung von Satz 2.2. Zur besseren Übersicht setzen wir $\tilde{b}_i := \delta_{ik} b_i$ für $i = 1, \dots, k$ und erhalten

$$\begin{aligned}
 \frac{dN_k(\mathbf{b}_{1k}; \mathbf{R}_{1k})}{dz} &= \sum_{i=1}^k \frac{\partial N_k(\mathbf{b}_{1k}; \mathbf{R}_{1k})}{\partial \tilde{b}_i} \frac{d\tilde{b}_i}{dz} \\
 &= \sum_{i=1}^k \delta_{ik} \frac{db_i}{dz} \frac{\partial}{\partial \tilde{b}_i} \int_{-\infty}^{\tilde{b}_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_i^2} \times \\
 &\quad \times N_{k-1} \left(\left(\frac{\tilde{b}_1 - \rho_{i1}x_i}{\sqrt{1 - \rho_{i1}^2}}, \dots, \overset{\text{ohne } i}{\downarrow}, \dots, \frac{\tilde{b}_{k-1} - \rho_{i,k-1}x_i}{\sqrt{1 - \rho_{i,k-1}^2}}, \frac{\tilde{b}_k - \rho_{ik}x_i}{\sqrt{1 - \rho_{ik}^2}} \right); \tilde{\mathbf{R}}_{1k \setminus \{i\}} \right) dx_i \\
 &= \sum_{i=1}^k \delta_{ik} \frac{db_i}{dz} \frac{dN(b_i)}{db_i} N_{k-1}(\tilde{\mathbf{b}}_{1k \setminus \{i\}}; \tilde{\mathbf{R}}_{1k \setminus \{i\}}) \\
 &= \sum_{i=1}^k \delta_{ik} \frac{dN(b_i)}{dz} N_{k-1}(\tilde{\mathbf{b}}_{1k \setminus \{i\}}; \tilde{\mathbf{R}}_{1k \setminus \{i\}}).
 \end{aligned}$$

□

Lemma 2.5. *Es sei \mathbf{B} eine symmetrische invertierbare Matrix, so dass der obere rechte Quadrant und der untere linke Quadrant jeweils Nullquadranten sind, d.h. $b_{st} = 0$ falls $s < m, t > m$ oder $s > m, t < m$*

$$\mathbf{B} := \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_2 \end{pmatrix},$$

dann gilt

$$N_n(a_1, a_2, \dots, a_n; \mathbf{B}) = N_m(a_1, a_2, \dots, a_m; \mathbf{B}_1) N_{n-m}(a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_n; \mathbf{B}_2). \quad (2.8)$$

Beweis. Die Behauptung folgt allein aus

$$\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{B}_1) \det(\mathbf{B}_2)$$

und

$$\mathbf{x}_{1n}^t \mathbf{B}^{-1} \mathbf{x}_{1n} = \mathbf{x}_{1m}^t \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{x}_{1m} + \mathbf{x}_{m+1,n}^t \mathbf{B}_2^{-1} \mathbf{x}_{m+1,n},$$

mit $\mathbf{x}_{ij}^t = (x_i, x_{i+1}, \dots, x_j)$.

□

Bemerkung 2.6. Ab jetzt spezifizieren wir die in den Vektoren \mathbf{b}_{1k} , \mathbf{a}_{1k} und $\tilde{\mathbf{b}}_{1k \setminus \{i\}}$, $\tilde{\mathbf{a}}_{1k \setminus \{i\}}$ vorkommenden Größen b_i, a_i, ρ_{ij} und setzen für $i, j = 1, \dots, k$

$$b_i = \frac{\log \frac{S}{S_i^*} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) t_i}{\sigma \sqrt{t_i}}, \quad a_i = b_i + \sigma \sqrt{t_i} \quad \text{und} \quad \rho_{ij} = \delta_{ik} \delta_{kj} \sqrt{\frac{t_{\min\{i,j\}}}{t_{\max\{i,j\}}}}. \quad (2.9)$$

Die Übertragung des Ergebnisses aus Lemma 2.5 auf unseren Fall führt somit zum folgenden Resultat.

Lemma 2.7. *Es gilt*

$$N_{k-1} \left(\tilde{\mathbf{b}}_{1k \setminus \{i\}} ; \tilde{\mathbf{R}}_{1k \setminus \{i\}} \right) = N_{k-i} \left(\tilde{\mathbf{b}}_{ik \setminus \{i\}} ; \tilde{\mathbf{R}}_{ik \setminus \{i\}} \right) N_{i-1} \left(\tilde{\mathbf{b}}_{1i \setminus \{i\}} ; \tilde{\mathbf{R}}_{1i \setminus \{i\}} \right) \quad (2.10)$$

$$N_{k-1} \left(\tilde{\mathbf{a}}_{1k \setminus \{i\}} ; \tilde{\mathbf{R}}_{1k \setminus \{i\}} \right) = N_{k-i} \left(\tilde{\mathbf{a}}_{ik \setminus \{i\}} ; \tilde{\mathbf{R}}_{ik \setminus \{i\}} \right) N_{i-1} \left(\tilde{\mathbf{a}}_{1i \setminus \{i\}} ; \tilde{\mathbf{R}}_{1i \setminus \{i\}} \right) \quad (2.11)$$

mit

$$\tilde{\mathbf{b}}_{1k \setminus \{i\}} = \left(\underbrace{\frac{\tilde{b}_1 - \rho_{i1} \tilde{b}_i}{\sqrt{1 - \rho_{i1}^2}} \dots \dots}_{\tilde{\mathbf{b}}_{1i \setminus \{i\}}}, \overset{\text{ohne } i}{\downarrow} \dots, \underbrace{\frac{\tilde{b}_{k-1} - \rho_{i,k-1} \tilde{b}_i}{\sqrt{1 - \rho_{i,k-1}^2}}, \frac{\tilde{b}_k - \rho_{ik} \tilde{b}_i}{\sqrt{1 - \rho_{ik}^2}}}_{\tilde{\mathbf{b}}_{ik \setminus \{i\}}} \right), \quad (2.12)$$

$$\tilde{\mathbf{a}}_{1k \setminus \{i\}} = \left(\underbrace{\frac{\tilde{a}_1 - \rho_{i1} \tilde{a}_i}{\sqrt{1 - \rho_{i1}^2}} \dots \dots}_{\tilde{\mathbf{a}}_{1i \setminus \{i\}}}, \overset{\text{ohne } i}{\downarrow} \dots, \underbrace{\frac{\tilde{a}_{k-1} - \rho_{i,k-1} \tilde{a}_i}{\sqrt{1 - \rho_{i,k-1}^2}}, \frac{\tilde{a}_k - \rho_{ik} \tilde{a}_i}{\sqrt{1 - \rho_{ik}^2}}}_{\tilde{\mathbf{a}}_{ik \setminus \{i\}}} \right) \quad (2.13)$$

und

$$\tilde{\mathbf{R}}_{1k \setminus \{i\}} = \left\{ \frac{\rho_{st} - \rho_{is} \rho_{it}}{\sqrt{(1 - \rho_{is}^2)(1 - \rho_{it}^2)}} \mid s, t = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, k \right\}.$$

Beweis. Nach Definition von ρ_{ij} (bis auf das Vorzeichen) gilt

$$\rho_{ij} = \sqrt{\frac{t_{\min\{i,j\}}}{t_{\max\{i,j\}}}}.$$

Daher ist $\rho_{is} \rho_{it} = \rho_{st}$ für $s < i, t > i$ (2-ter Quadrant) oder $s > i, t < i$ (4-ter Quadrant). Aus der Definition der modifizierten Korrelationsmatrix $\tilde{\mathbf{R}}_{1k \setminus \{i\}}$ ist ersichtlich, dass sie genau die Gestalt der Matrix \mathbf{B} aus Lemma 2.5 hat. Die Behauptung folgt somit nach Lemma 2.5. \square

Bemerkung. Ein ähnliches Ergebnis wie in Lemma 2.7 ist auch in der Arbeit von Schroder [103] zu finden.

Bemerkung 2.8. Aus der Struktur der Vektoren $\tilde{\mathbf{b}}_{1k \setminus \{i\}}$ und $\tilde{\mathbf{a}}_{1k \setminus \{i\}}$ folgt für alle $s < i$

$$\begin{aligned} b_s - \rho_{is} b_i &= b_s - \sqrt{\frac{t_s}{t_i}} b_i \\ &= a_s + \sigma \sqrt{t_s} - \sqrt{\frac{t_s}{t_i}} (a_i + \sigma \sqrt{t_i}) \\ &= a_s - \sqrt{\frac{t_s}{t_i}} a_i = a_s - \rho_{is} a_i \end{aligned}$$

und daher $\tilde{\mathbf{b}}_{1i \setminus \{i\}} = \tilde{\mathbf{a}}_{1i \setminus \{i\}}$ ¹. Das halten wir im nächsten Lemma fest.

Lemma 2.9. *Es gilt*

$$\tilde{\mathbf{b}}_{1i \setminus \{i\}} = \tilde{\mathbf{a}}_{1i \setminus \{i\}} \quad (2.14)$$

und daraus

$$N_{i-1} \left(\tilde{\mathbf{b}}_{1i \setminus \{i\}} ; \tilde{\mathbf{R}}_{1i \setminus \{i\}} \right) = N_{i-1} \left(\tilde{\mathbf{a}}_{1i \setminus \{i\}} ; \tilde{\mathbf{R}}_{1i \setminus \{i\}} \right). \quad (2.15)$$

Lemma 2.10. *Es gilt*

$$\begin{aligned} P_{n-i}^{(n)}(S_i^*, K, T_i) &= K \sum_{k=i+1}^n e^{-r(t_k - t_i)} N_{k-i} \left(\tilde{\mathbf{b}}_{ik \setminus \{i\}} ; \tilde{\mathbf{R}}_{ik \setminus \{i\}} \right) \\ &\quad - S_i^* \sum_{k=i+1}^n N_{k-i} \left(\tilde{\mathbf{a}}_{ik \setminus \{i\}} ; \tilde{\mathbf{R}}_{ik \setminus \{i\}} \right). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Beweis. Wir stellen fest, dass für die j -ten Elemente der Vektoren $\tilde{\mathbf{b}}_{ik \setminus \{i\}}$ und $\tilde{\mathbf{a}}_{ik \setminus \{i\}}$ gilt

$$\frac{\tilde{b}_j - \rho_{ij} \tilde{b}_i}{\sqrt{1 - \rho_{ij}^2}} = \delta_{jk} \frac{\log \frac{S_i^*}{S_j^*} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (t_j - t_i)}{\sigma \sqrt{t_j - t_i}} \quad j = i+1, \dots, k$$

¹Zur Erinnerung $\tilde{b}_s := \delta_{sk} b_s$ und daher folgt $\tilde{b}_s = b_s$ für alle $s < k$.

bzw.

$$\frac{\tilde{a}_j - \rho_{ij}\tilde{a}_i}{\sqrt{1 - \rho_{ij}^2}} = \frac{\tilde{b}_j - \rho_{ij}\tilde{b}_i}{\sqrt{1 - \rho_{ij}^2}} + \delta_{jk}\sigma\sqrt{t_j - t_i} \quad j = i + 1, \dots, k$$

und die Matrix $\tilde{\mathbf{R}}_{ik \setminus \{i\}}$ die folgende Struktur besitzt

$$\tilde{\mathbf{R}}_{ik \setminus \{i\}} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{\frac{t_{i+1}-t_i}{t_{i+2}-t_i}} & \cdots & \sqrt{\frac{t_{i+1}-t_i}{t_{k-1}-t_i}} & -\sqrt{\frac{t_{i+1}-t_i}{t_k-t_i}} \\ \sqrt{\frac{t_{i+1}-t_i}{t_{i+2}-t_i}} & 1 & \cdots & \sqrt{\frac{t_{i+2}-t_i}{t_{k-1}-t_i}} & -\sqrt{\frac{t_{i+2}-t_i}{t_k-t_i}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \sqrt{\frac{t_{i+1}-t_i}{t_{k-1}-t_i}} & \sqrt{\frac{t_{i+2}-t_i}{t_{k-1}-t_i}} & \cdots & 1 & -\sqrt{\frac{t_{k-1}-t_i}{t_k-t_i}} \\ -\sqrt{\frac{t_{i+1}-t_i}{t_k-t_i}} & -\sqrt{\frac{t_{i+2}-t_i}{t_k-t_i}} & \cdots & -\sqrt{\frac{t_{k-1}-t_i}{t_k-t_i}} & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

Die Behauptung folgt direkt aus Feststellung 1.12 in der die $(n-i)$ -Bermuda-Put-Option an der Stelle $S_i = S_i^*$ ausgewertet wird. □

Lemma 2.11. Für $z \in \{S, K, r\}$ gilt

$$\frac{dN(a_i)}{dz} = e^{-rt_i} \frac{S_i^*}{S} \frac{dN(b_i)}{dz}, \quad (2.18)$$

wobei

$$b_i = \frac{\log \frac{S}{S_i^*} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) t_i}{\sigma\sqrt{t_i}} \quad \text{und} \quad a_i = b_i + \sigma\sqrt{t_i}. \quad (2.19)$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \frac{dN(a_i)}{dz} &= \frac{dN(a_i)}{da_i} \frac{da_i}{dz} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{a_i^2}{2}} \frac{da_i}{dz} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{b_i^2 + 2b_i\sigma\sqrt{t_i} + \sigma^2 t_i}{2}} \frac{db_i}{dz} \\ &= e^{-\log \frac{S}{S_i^*} - rt_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{b_i^2}{2}} \frac{db_i}{dz} \\ &= e^{-rt_i} \frac{S_i^*}{S} \frac{dN(b_i)}{dz}. \end{aligned}$$

□

Nun sind wir in der Lage, die am Anfang des Abschnittes angesprochene Relation herzuleiten.

Lemma 2.12. Für $z \in \{S, K, r\}$ gilt

$$K \sum_{k=1}^n e^{-rt_k} \frac{dN_k(\mathbf{b}_{1k}; \mathbf{R}_{1k})}{dz} - S \sum_{k=1}^n \frac{dN_k(\mathbf{a}_{1k}; \mathbf{R}_{1k})}{dz} = 0. \quad (2.20)$$

Beweis. Mit Hilfe von Satz 2.4 und von Lemma 2.7 folgt für den ersten Term

$$\begin{aligned} & K \sum_{k=1}^n e^{-rt_k} \frac{dN_k(\mathbf{b}_{1k}; \mathbf{R}_{1k})}{dz} = \\ & = K \sum_{k=1}^n e^{-rt_k} \sum_{i=1}^k \delta_{ik} \frac{dN(b_i)}{dz} N_{k-1}(\tilde{\mathbf{b}}_{1k \setminus \{i\}}; \tilde{\mathbf{R}}_{1k \setminus \{i\}}) \\ & = \sum_{i=1}^n K \sum_{k=i}^n \delta_{ik} e^{-r(t_k - t_i)} e^{-rt_i} \frac{dN(b_i)}{dz} N_{k-i}(\tilde{\mathbf{b}}_{ik \setminus \{i\}}; \tilde{\mathbf{R}}_{ik \setminus \{i\}}) N_{i-1}(\tilde{\mathbf{b}}_{1i \setminus \{i\}}; \tilde{\mathbf{R}}_{1i \setminus \{i\}}) \\ & = \sum_{i=1}^n K \underbrace{e^{-rt_i} \frac{dN(b_i)}{dz} N_{i-1}(\tilde{\mathbf{b}}_{1i \setminus \{i\}}; \tilde{\mathbf{R}}_{1i \setminus \{i\}})}_{:=\beta_i} \sum_{k=i}^n \delta_{ik} e^{-r(t_k - t_i)} N_{k-i}(\tilde{\mathbf{b}}_{ik \setminus \{i\}}; \tilde{\mathbf{R}}_{ik \setminus \{i\}}) \\ & = \sum_{i=1}^n \beta_i \left(-K + K \sum_{k=i+1}^n e^{-r(t_k - t_i)} N_{k-i}(\tilde{\mathbf{b}}_{ik \setminus \{i\}}; \tilde{\mathbf{R}}_{ik \setminus \{i\}}) \right) \end{aligned}$$

und für den zweiten Term

$$\begin{aligned} & S \sum_{k=1}^n \frac{dN_k(\mathbf{a}_{1k}; \mathbf{R}_{1k})}{dz} = \\ & = S \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k \delta_{ik} \frac{dN(a_i)}{dz} N_{k-1}(\tilde{\mathbf{a}}_{1k \setminus \{i\}}; \tilde{\mathbf{R}}_{1k \setminus \{i\}}) \\ & = S \sum_{i=1}^n \sum_{k=i}^n \delta_{ik} e^{-rt_i} \frac{S_i^*}{S} \frac{dN(b_i)}{dz} N_{k-i}(\tilde{\mathbf{a}}_{ik \setminus \{i\}}; \tilde{\mathbf{R}}_{ik \setminus \{i\}}) N_{i-1}(\tilde{\mathbf{a}}_{1i \setminus \{i\}}; \tilde{\mathbf{R}}_{1i \setminus \{i\}}) \end{aligned}$$

Kapitel 2. Sensitivitäten der n -Bermuda-Put-Option

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n S_i^* e^{-rt_i} \underbrace{\frac{dN(b_i)}{dz}}_{:=\alpha_i} N_{i-1} \left(\tilde{\mathbf{a}}_{1i \setminus \{i\}} ; \tilde{\mathbf{R}}_{1i \setminus \{i\}} \right) \sum_{k=i}^n \delta_{ik} N_{k-i} \left(\tilde{\mathbf{a}}_{ik \setminus \{i\}} ; \tilde{\mathbf{R}}_{ik \setminus \{i\}} \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \alpha_i \left(-S_i^* + S_i^* \sum_{k=i+1}^n N_{k-i} \left(\tilde{\mathbf{a}}_{ik \setminus \{i\}} ; \tilde{\mathbf{R}}_{ik \setminus \{i\}} \right) \right).
\end{aligned}$$

Wir stellen fest, dass $\beta_i = \alpha_i$ nach Lemma 2.9 gilt. Beide Terme zusammengefasst ergeben

$$\begin{aligned}
&K \sum_{k=1}^n e^{-rt_k} \frac{dN_k(\mathbf{b}_{1k} ; \mathbf{R}_{1k})}{dz} - S \sum_{k=1}^n \frac{dN_k(\mathbf{a}_{1k} ; \mathbf{R}_{1k})}{dz} = \\
&= \sum_{i=1}^n \beta_i \left(-K + K \sum_{k=i+1}^n e^{-r(t_k - t_i)} N_{k-i} \left(\tilde{\mathbf{b}}_{ik \setminus \{i\}} ; \tilde{\mathbf{R}}_{ik \setminus \{i\}} \right) \right. \\
&\quad \left. - \sum_{i=1}^n \alpha_i \left(-S_i^* + S_i^* \sum_{k=i+1}^n N_{k-i} \left(\tilde{\mathbf{a}}_{ik \setminus \{i\}} ; \tilde{\mathbf{R}}_{ik \setminus \{i\}} \right) \right) \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \beta_i \left(-(K - S_i^*) + \right. \\
&\quad \left. + K \sum_{k=i+1}^n e^{-r(t_k - t_i)} N_{k-i} \left(\tilde{\mathbf{b}}_{ik \setminus \{i\}} ; \tilde{\mathbf{R}}_{ik \setminus \{i\}} \right) - S_i^* \sum_{k=i+1}^n N_{k-i} \left(\tilde{\mathbf{a}}_{ik \setminus \{i\}} ; \tilde{\mathbf{R}}_{ik \setminus \{i\}} \right) \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \beta_i \left(\underbrace{-(K - S_i^*) + P_{n-i}^{(n)}(S_i^*, K, T_i)}_{:=0 \text{ nach Def. von } S_i^*} \right) = 0.
\end{aligned}$$

Im vorletzten Schritt haben wir dabei das Ergebnis aus Lemma 2.10 verwendet. \square

Feststellung 2.13. An dieser Stelle möchten wir eine weitere nützliche Relation hervorheben

$$\begin{aligned}
&K \sum_{k=1}^n e^{-rt_k} \sum_{i=1}^k \delta_{ik} \frac{dN(b_i)}{db_i} N_{k-1} \left(\tilde{\mathbf{b}}_{1k \setminus \{i\}} ; \tilde{\mathbf{R}}_{1k \setminus \{i\}} \right) \\
&\quad - S \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k \delta_{ik} \frac{dN(a_i)}{da_i} N_{k-1} \left(\tilde{\mathbf{a}}_{1k \setminus \{i\}} ; \tilde{\mathbf{R}}_{1k \setminus \{i\}} \right) = 0. \tag{2.21}
\end{aligned}$$

Diese tritt zum ersten Mal beim Beweis von Lemma 2.12 auf und wird im späteren Verlauf der Arbeit Verwendung finden.

Bemerkung. Alle obigen Resultate könnten mit geringfügigen Anpassungen auch auf n -Bermuda-Put bzw. Call-Optionen im Black-Scholes-Modell mit stetigen Dividenden übertragen werden.

Zuletzt wollen wir ein Lemma und eine Folgerung daraus präsentieren, die bei der Untersuchung auf die Konvexität der n -Bermuda-Put-Optionen hilfreich sein wird.

Lemma 2.14. *Es gilt*

$$\sum_{k=1}^n N_k(\mathbf{a}_{1k}; \mathbf{R}_{1k}) = 1 - N_n(\hat{\mathbf{a}}_{1n}; \hat{\mathbf{R}}_{1n}) \quad (2.22)$$

mit

$$\hat{\mathbf{a}}_{1n} = \mathbf{D}_n \mathbf{a}_{1n}, \quad \hat{\mathbf{R}}_{1n} = \mathbf{D}_n \mathbf{R}_{1n} \mathbf{D}_n$$

und einer Diagonalmatrix $\mathbf{D}_n := \text{diag}(1, \dots, 1, -1)$.

Beweis. Die Behauptung des Lemmas folgt direkt aus (1.32). Darüber hinaus kann die Relation (2.22) auch in der Arbeit von Selby und Hodges [106] gefunden werden. \square

Eine wiederholte Anwendung von Lemma 2.14 auf sich selbst führt zu einer Verallgemeinerungsformel, welche in der nächsten Folgerung präsentiert wird.

Folgerung 2.15. Aus

$$\sum_{k=1}^n N_k(\mathbf{a}_{1k}; \mathbf{R}_{1k}) = 1 - N_n(\hat{\mathbf{a}}_{1n}; \hat{\mathbf{R}}_{1n})$$

folgt

$$1 - \sum_{k=1}^{i-1} N_k(\mathbf{a}_{1k}; \mathbf{R}_{1k}) - \sum_{k=i}^n N_k(\mathbf{a}_{1k}; \mathbf{R}_{1k}) = N_n(\hat{\mathbf{a}}_{1n}; \hat{\mathbf{R}}_{1n})$$

und daraus

$$N_{i-1}(\hat{\mathbf{a}}_{1,i-1}; \hat{\mathbf{R}}_{1,i-1}) - \sum_{k=i}^n N_k(\mathbf{a}_{1k}; \mathbf{R}_{1k}) = N_n(\hat{\mathbf{a}}_{1n}; \hat{\mathbf{R}}_{1n}). \quad (2.23)$$

Mit der in diesem Abschnitt geleisteten Vorbereitung sind wir in der Lage relativ einfach und vor allem übersichtlich die partiellen Ableitungen einer n -Bermuda-Option nach dem Aktienkurs S , dem Ausübungspreis K , der Restlaufzeit T , der Volatilität σ und dem Zinssatz r zu berechnen. Dabei nehmen wir an, dass $S, K, T, \sigma > 0$ sind.

2.2. Greeks

Satz 2.16 (Delta Δ). Die partielle Ableitung einer n -Bermuda-Put-Option nach dem Aktienkurs S wird als Δ bezeichnet und ist gleich

$$\Delta := \frac{\partial P_n}{\partial S} = - \sum_{k=1}^n N_k(\mathbf{a}_{1k}; \mathbf{R}_{1k}) < 0. \quad (2.24)$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_n}{\partial S} &= K \underbrace{\sum_{k=1}^n e^{-rt_k} \frac{dN_k(\mathbf{b}_{1k}; \mathbf{R}_{1k})}{dS}}_{= 0 \text{ nach Lemma 2.12}} - S \sum_{k=1}^n \frac{dN_k(\mathbf{a}_{1k}; \mathbf{R}_{1k})}{dS} - \sum_{k=1}^n N_k(\mathbf{a}_{1k}; \mathbf{R}_{1k}) \\ &= - \sum_{k=1}^n N_k(\mathbf{a}_{1k}; \mathbf{R}_{1k}). \end{aligned}$$

□

Bei der numerischen Berechnung von Delta kann Formel (2.24) vereinfacht werden. Wie wir bereits aus Lemma 2.14 wissen, gilt

$$\sum_{k=1}^n N_k(\mathbf{a}_{1k}; \mathbf{R}_{1k}) = 1 - N_n(\hat{\mathbf{a}}_{1n}; \hat{\mathbf{R}}_{1n})$$

mit

$$\hat{\mathbf{a}}_{1n} = \mathbf{D}_n \mathbf{a}_{1n}, \quad \hat{\mathbf{R}}_{1n} = \mathbf{D}_n \mathbf{R}_{1n} \mathbf{D}_n$$

und einer Diagonalmatrix $\mathbf{D}_n := \text{diag}(1, \dots, 1, -1)$. Anstatt n Integrale wird nur ein Integral ausgewertet, womit bei der Berechnung viel Rechenzeit gespart wird. Leider enthält der Vektor $\hat{\mathbf{a}}_{1n}$ auf der rechten Seite von Formel (2.22) n -kritische Preise, die wiederum zuerst rekursiv aus der Geske-Johnson-Formel ermittelt werden müssen.

Satz 2.17. Die partielle Ableitung einer n -Bermuda-Put-Option nach dem Ausübungspreis K ist

$$\frac{\partial P_n}{\partial K} = \sum_{k=1}^n e^{-rt_k} N_k(\mathbf{b}_{1k}; \mathbf{R}_{1k}) > 0. \quad (2.25)$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_n}{\partial K} &= \sum_{k=1}^n e^{-rt_k} N_k(\mathbf{b}_{1k}; \mathbf{R}_{1k}) + \underbrace{K \sum_{k=1}^n e^{-rt_k} \frac{dN_k(\mathbf{b}_{1k}; \mathbf{R}_{1k})}{dK} - S \sum_{k=1}^n \frac{dN_k(\mathbf{a}_{1k}; \mathbf{R}_{1k})}{dK}}_{=0 \text{ nach Lemma 2.12}} \\ &= \sum_{k=1}^n e^{-rt_k} N_k(\mathbf{b}_{1k}; \mathbf{R}_{1k}). \end{aligned}$$

□

Satz 2.18 (Rho ρ). Die partielle Ableitung einer n -Bermuda-Put-Option nach dem Zinssatz r wird als ρ bezeichnet und ist gleich

$$\rho := \frac{\partial P_n}{\partial r} = -K \sum_{k=1}^n t_k e^{-rt_k} N_k(\mathbf{b}_{1k}; \mathbf{R}_{1k}) < 0. \quad (2.26)$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_n}{\partial r} &= \\ &= -K \sum_{k=1}^n t_k e^{-rt_k} N_k(\mathbf{b}_{1k}; \mathbf{R}_{1k}) + \underbrace{K \sum_{k=1}^n e^{-rt_k} \frac{dN_k(\mathbf{b}_{1k}; \mathbf{R}_{1k})}{dr} - S \sum_{k=1}^n \frac{dN_k(\mathbf{a}_{1k}; \mathbf{R}_{1k})}{dr}}_{=0 \text{ nach Lemma 2.12}} \\ &= -K \sum_{k=1}^n t_k e^{-rt_k} N_k(\mathbf{b}_{1k}; \mathbf{R}_{1k}). \end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.19. Das negative Vorzeichen der Ableitung stimmt auch mit der Intuition überein, wonach eine Erhöhung des risikolosen Zinses eine Minderung des Barwertes des Ausübungspreises nach sich zieht und als Folge dessen ebenso zur Verringerung des Optionspreises selbst führt.

Die Sensitivität Delta ist hierbei dermaßen wichtig, dass sogar untersucht wird, wie stark Delta selbst bei einer Änderung des Aktienkurses variiert.

Satz 2.20 (Gamma Γ). Die zweite partielle Ableitung einer n -Bermuda-Put-Option nach dem Aktienkurs S wird als Γ bezeichnet und ist gleich

$$\begin{aligned} \Gamma := \frac{\partial^2 P_n}{\partial S^2} &= - \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k \delta_{ik} \frac{dN(a_i)}{dS} N_{k-1}(\tilde{\mathbf{a}}_{1k \setminus \{i\}}; \tilde{\mathbf{R}}_{1k \setminus \{i\}}) \\ &= - \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k \delta_{ik} \frac{dN(a_i)}{da_i} \frac{da_i}{dS} N_{k-1}(\tilde{\mathbf{a}}_{1k \setminus \{i\}}; \tilde{\mathbf{R}}_{1k \setminus \{i\}}) > 0. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Beweis. Dies folgt direkt aus dem Beweis von Lemma 2.12. Das positive Vorzeichen wird in der nächsten Bemerkung diskutiert. \square

Bemerkung 2.21. Die zweite partielle Ableitung nach dem Aktienkurs enthält den Term $\frac{da_i}{dS}$ und somit auch die Ableitung des kritischen Preises S_i^* nach dem Aktienkurs S . Nach Definition des kritischen Preises S_i^* (siehe Definition 1.6) ist es ersichtlich, dass dieser nicht von dem aktuellen Aktienkurs S abhängt (vgl. Carr et al. [20], Geske und Johnson [41]). Mit dieser Überlegung folgt für den Term $\frac{da_i}{dS}$

$$\frac{da_i}{dS} = \frac{d}{dS} \left(\frac{\log \frac{S}{S_i^*} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) t_i}{\sigma \sqrt{t_i}} \right) = \frac{1}{S \sigma \sqrt{t_i}} \quad (2.28)$$

und mithin für die zweite Ableitung nach dem Aktienkurs

$$\frac{\partial^2 P_n}{\partial S^2} = -\frac{1}{S \sigma} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k \delta_{ik} \frac{dN(a_i)}{da_i} \frac{1}{\sqrt{t_i}} N_{k-1} \left(\tilde{\mathbf{a}}_{1k \setminus \{i\}}; \tilde{\mathbf{R}}_{1k \setminus \{i\}} \right). \quad (2.29)$$

Das Vorzeichen von Gamma wird aus der letzten Formel nicht ersichtlich. Daher formen wir (2.29) zunächst um. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P_n}{\partial S^2} &= -\frac{1}{S \sigma} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k \delta_{ik} \frac{dN(a_i)}{da_i} \frac{1}{\sqrt{t_i}} N_{k-1} \left(\tilde{\mathbf{a}}_{1k \setminus \{i\}}; \tilde{\mathbf{R}}_{1k \setminus \{i\}} \right) \\ &= -\frac{1}{S \sigma} \sum_{i=1}^n \frac{dN(a_i)}{da_i} \frac{1}{\sqrt{t_i}} \sum_{k=i}^n \delta_{ik} N_{k-1} \left(\tilde{\mathbf{a}}_{1k \setminus \{i\}}; \tilde{\mathbf{R}}_{1k \setminus \{i\}} \right) \\ &= \frac{1}{S \sigma} \sum_{i=1}^n \frac{dN(a_i)}{da_i} \frac{1}{\sqrt{t_i}} \left(N_{i-1} \left(\tilde{\mathbf{a}}_{1i \setminus \{i\}}; \tilde{\mathbf{R}}_{1i \setminus \{i\}} \right) - \sum_{k=i+1}^n N_{k-1} \left(\tilde{\mathbf{a}}_{1k \setminus \{i\}}; \tilde{\mathbf{R}}_{1k \setminus \{i\}} \right) \right). \end{aligned}$$

Beim genaueren Hinsehen stellen wir fest, dass die Differenz

$$N_{i-1} \left(\tilde{\mathbf{a}}_{1i \setminus \{i\}}; \tilde{\mathbf{R}}_{1i \setminus \{i\}} \right) - \sum_{k=i+1}^n N_{k-1} \left(\tilde{\mathbf{a}}_{1k \setminus \{i\}}; \tilde{\mathbf{R}}_{1k \setminus \{i\}} \right), \quad i = 1, \dots, n$$

uns schon einmal begegnet ist und zwar in Folgerung 2.15. Die Struktur der Vektoren $\tilde{\mathbf{a}}_{1i \setminus \{i\}}$, $\tilde{\mathbf{a}}_{1k \setminus \{i\}}$ und Matrizen $\tilde{\mathbf{R}}_{1i \setminus \{i\}}$, $\tilde{\mathbf{R}}_{1k \setminus \{i\}}$ entspricht der in Formel (2.23). Danach gilt

$$N_{i-1} \left(\tilde{\mathbf{a}}_{1i \setminus \{i\}} ; \tilde{\mathbf{R}}_{1i \setminus \{i\}} \right) - \sum_{k=i+1}^n N_{k-1} \left(\tilde{\mathbf{a}}_{1k \setminus \{i\}} ; \tilde{\mathbf{R}}_{1k \setminus \{i\}} \right) = N_{n-1} \left(\tilde{\mathbf{a}}_{1n \setminus \{i\}} ; \tilde{\mathbf{R}}_{1n \setminus \{i\}} \right) > 0$$

und als Folgerung $\frac{\partial^2 P_n}{\partial S^2} > 0$.

Die partiellen Ableitungen nach der Volatilität σ und der Restlaufzeit T können nicht direkt mit Hilfe von Lemma 2.12 berechnet werden. Das liegt daran, dass $a_i = b_i + \sigma\sqrt{t_i}$ ist. Deshalb beinhaltet die Relation zwischen $\frac{dN(a_i)}{dz}$ und $\frac{dN(b_i)}{dz}$ für $z \in \{\sigma, T\}$ weitere „Störterme“. Es gilt

$$\frac{dN(a_i)}{d\sigma} = e^{-rt_i} \frac{S_i^*}{S} \frac{dN(b_i)}{d\sigma} + \frac{dN(a_i)}{da_i} \sqrt{t_i} \quad (2.30)$$

und

$$\frac{dN(a_i)}{dT} = e^{-rt_i} \frac{S_i^*}{S} \frac{dN(b_i)}{dT} + \frac{dN(a_i)}{da_i} \frac{\sigma}{2\sqrt{t_i}} \frac{dt_i}{dT}. \quad (2.31)$$

Hier bringt uns Feststellung 2.13 weiter.

Satz 2.22 (Vega). *Die partielle Ableitung einer n -Bermuda-Put-Option nach der Volatilität σ wird Vega genannt und ist gleich*

$$\frac{\partial P_n}{\partial \sigma} = -S \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k \delta_{ik} \frac{dN(a_i)}{da_i} \sqrt{t_i} N_{k-1} \left(\tilde{\mathbf{a}}_{1k \setminus \{i\}} ; \tilde{\mathbf{R}}_{1k \setminus \{i\}} \right) > 0, \quad (2.32)$$

oder äquivalent dazu

$$\frac{\partial P_n}{\partial \sigma} = -K \sum_{k=1}^n e^{-rt_k} \sum_{i=1}^k \delta_{ik} \frac{dN(b_i)}{db_i} \sqrt{t_i} N_{k-1} \left(\tilde{\mathbf{b}}_{1k \setminus \{i\}} ; \tilde{\mathbf{R}}_{1k \setminus \{i\}} \right) > 0. \quad (2.33)$$

Beweis. Nach Satz 2.4 und Feststellung 2.13 gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_n}{\partial \sigma} &= K \sum_{k=1}^n e^{-rt_k} \frac{dN_k(\mathbf{b}_{1k} ; \mathbf{R}_{1k})}{d\sigma} - S \sum_{k=1}^n \frac{dN_k(\mathbf{a}_{1k} ; \mathbf{R}_{1k})}{d\sigma} \\ &= K \sum_{k=1}^n e^{-rt_k} \sum_{i=1}^k \delta_{ik} \frac{dN(b_i)}{db_i} \frac{db_i}{d\sigma} N_{k-1} \left(\tilde{\mathbf{b}}_{1k \setminus \{i\}} ; \tilde{\mathbf{R}}_{1k \setminus \{i\}} \right) \\ &\quad - S \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k \delta_{ik} \frac{dN(a_i)}{da_i} \left(\frac{db_i}{d\sigma} + \sqrt{t_i} \right) N_{k-1} \left(\tilde{\mathbf{a}}_{1k \setminus \{i\}} ; \tilde{\mathbf{R}}_{1k \setminus \{i\}} \right) \end{aligned}$$

Kapitel 2. Sensitivitäten der n -Bermuda-Put-Option

$$= -S \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k \delta_{ik} \frac{dN(a_i)}{da_i} \sqrt{t_i} N_{k-1} \left(\tilde{\mathbf{a}}_{1k \setminus \{i\}} ; \tilde{\mathbf{R}}_{1k \setminus \{i\}} \right)$$

oder mit Feststellung 2.13 äquivalent dazu

$$= -K \sum_{k=1}^n e^{-rt_k} \sum_{i=1}^k \delta_{ik} \frac{dN(b_i)}{db_i} \sqrt{t_i} N_{k-1} \left(\tilde{\mathbf{b}}_{1k \setminus \{i\}} ; \tilde{\mathbf{R}}_{1k \setminus \{i\}} \right).$$

Die Untersuchung des Vorzeichens erfolgt genau wie bei Gamma. □

Bemerkung. Eine Erhöhung der Volatilität bedeutet eine Erhöhung sowohl von Gewinn- als auch von Verlustchancen. Da die Verluste nach unten durch 0 beschränkt sind, zieht eine Erhöhung des Volatilitätsparameters eine Erhöhung des Optionspreises nach sich.

Annahme 2.23. Wir nehmen an, dass gilt

$$\frac{dt_i}{dT} = \frac{t_i}{T}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.34)$$

d.h. $t_i = a_i T$, $a_i \in \mathbb{R}$.

Bemerkung 2.24. Arithmetische bzw. geometrische Zerlegungen erfüllen die Forderung in (2.34).

Satz 2.25 (Theta Θ). Die partielle Ableitung einer n -Bermuda-Put-Option nach der Restlaufzeit T wird als Θ bezeichnet und ist gleich

$$\begin{aligned} \Theta := \frac{\partial P_n}{\partial T} &= -K \frac{r}{T} \sum_{k=1}^n t_k e^{-rt_k} N_k(\mathbf{b}_{1k}; \mathbf{R}_{1k}) \\ &\quad - S \frac{\sigma}{2T} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k \delta_{ik} \frac{dN(a_i)}{da_i} \sqrt{t_i} N_{k-1} \left(\tilde{\mathbf{a}}_{1k \setminus \{i\}} ; \tilde{\mathbf{R}}_{1k \setminus \{i\}} \right) \end{aligned} \quad (2.35)$$

oder äquivalent dazu

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_n}{\partial T} &= -K \frac{r}{T} \sum_{k=1}^n t_k e^{-rt_k} N_k(\mathbf{b}_{1k}; \mathbf{R}_{1k}) \\ &\quad - K \frac{\sigma}{2T} \sum_{k=1}^n e^{-rt_k} \sum_{i=1}^k \delta_{ik} \frac{dN(b_i)}{db_i} \sqrt{t_i} N_{k-1} \left(\tilde{\mathbf{b}}_{1k \setminus \{i\}} ; \tilde{\mathbf{R}}_{1k \setminus \{i\}} \right). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Beweis. Nach Satz 2.4 und Feststellung 2.13 gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P_n}{\partial T} &= -rK \sum_{k=1}^n e^{-rt_k} \frac{dt_k}{dT} N_k(\mathbf{b}_{1k}; \mathbf{R}_{1k}) \\
&\quad + K \sum_{k=1}^n e^{-rt_k} \frac{dN_k(\mathbf{b}_{1k}; \mathbf{R}_{1k})}{dT} - S \sum_{k=1}^n \frac{dN_k(\mathbf{a}_{1k}; \mathbf{R}_{1k})}{dT} \\
&= -rK \sum_{k=1}^n e^{-rt_k} \frac{dt_k}{dT} N_k(\mathbf{b}_{1k}; \mathbf{R}_{1k}) \\
&\quad + K \sum_{k=1}^n e^{-rt_k} \sum_{i=1}^k \delta_{ik} \frac{dN(b_i)}{db_i} \frac{db_i}{dT} N_{k-1}(\tilde{\mathbf{b}}_{1k \setminus \{i\}}; \tilde{\mathbf{R}}_{1k \setminus \{i\}}) \\
&\quad - S \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k \delta_{ik} \frac{dN(a_i)}{da_i} \left(\frac{db_i}{dT} + \frac{\sigma}{2\sqrt{t_i}} \frac{dt_i}{dT} \right) N_{k-1}(\tilde{\mathbf{a}}_{1k \setminus \{i\}}; \tilde{\mathbf{R}}_{1k \setminus \{i\}}) \\
&= -K \frac{r}{T} \sum_{k=1}^n t_k e^{-rt_k} N_k(\mathbf{b}_{1k}; \mathbf{R}_{1k}) \\
&\quad - S \frac{\sigma}{2T} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k \delta_{ik} \frac{dN(a_i)}{da_i} \sqrt{t_i} N_{k-1}(\tilde{\mathbf{a}}_{1k \setminus \{i\}}; \tilde{\mathbf{R}}_{1k \setminus \{i\}})
\end{aligned}$$

oder mit Feststellung 2.13 äquivalent dazu

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P_n}{\partial T} &= -K \frac{r}{T} \sum_{k=1}^n t_k e^{-rt_k} N_k(\mathbf{b}_{1k}; \mathbf{R}_{1k}) \\
&\quad - K \frac{\sigma}{2T} \sum_{k=1}^n e^{-rt_k} \sum_{i=1}^k \delta_{ik} \frac{dN(b_i)}{db_i} \sqrt{t_i} N_{k-1}(\tilde{\mathbf{b}}_{1k \setminus \{i\}}; \tilde{\mathbf{R}}_{1k \setminus \{i\}}).
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.26. Theta einer europäischen Put-Option ist gegeben durch (setzte $n = 1$ in (2.35))

$$\frac{\sigma S}{2\sqrt{T}} N'(a) - rK e^{-rT} N(-b), \quad (2.37)$$

wobei a und b wie in (2.2) definiert sind. Mit $N'(a) = e^{-rT} \frac{K}{S} N'(b)$ folgt somit

$$\Theta_{p^E} = e^{-rT} K \left(\frac{\sigma}{2\sqrt{T}} N'(-b) - rN(-b) \right). \quad (2.38)$$

Für $r = 0$ ist Theta einer europäischen Put-Option nicht negativ. Das ist keineswegs überraschend, denn in diesem Fall stimmen die Preise europäischer und amerikanischer

Kapitel 2. Sensitivitäten der n -Bermuda-Put-Option

Put-Optionen überein und Theta einer amerikanischen Put-Option ist immer nicht negativ.

Für $r > 0$ kann Theta einer europäischen Put-Option Θ_{pE} sowohl positive, als auch negative Werte annehmen. Eine detaillierte Analyse über das Verhalten von Theta in Abhängigkeit von anderen Modellparametern kann in [31] gefunden werden.

Im Falle einer n -Bermuda-Put-Option für $n > 1$ und $r > 0$ lässt sich über das Vorzeichen von Theta ebenso keine konkrete Aussage treffen, da die Ableitung nach der Restlaufzeit aus zwei Termen mit unterschiedlichen Vorzeichen besteht¹.

Theta einer amerikanischen Put-Option, als Grenzfall einer n -Bermuda-Put-Option mit $n \rightarrow \infty$, ist hingegen immer nicht negativ. Somit ist es ungewiss, ob und wenn ja, für welche n das Vorzeichen von Theta einer n -Bermuda-Put-Option unabhängig von anderen Modellparametern nicht negativ bleibt.

Auf der nächsten Seite listen wir alle Ableitungen noch einmal zur besseren Übersicht auf.

¹Mit einer ähnlichen Argumentation wie der bei der Untersuchung auf das Vorzeichen von Gamma kann gezeigt werden, dass der zweite Term in (2.35) positiv ist.

Zusammenfassung 2.27.

$$\frac{\partial P_n}{\partial S} = - \sum_{k=1}^n N_k(\mathbf{a}_{1k}; \mathbf{R}_{1k}), \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial P_n}{\partial K} = \sum_{k=1}^n e^{-rt_k} N_k(\mathbf{b}_{1k}; \mathbf{R}_{1k}), \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial P_n}{\partial r} = -K \sum_{k=1}^n t_k e^{-rt_k} N_k(\mathbf{b}_{1k}; \mathbf{R}_{1k}), \quad (2.41)$$

$$\frac{\partial P_n}{\partial \sigma} = -S \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k \delta_{ik} \frac{dN(a_i)}{da_i} \sqrt{t_i} N_{k-1} \left(\tilde{\mathbf{a}}_{1k \setminus \{i\}}; \tilde{\mathbf{R}}_{1k \setminus \{i\}} \right), \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_n}{\partial T} = & -K \frac{r}{T} \sum_{k=1}^n t_k e^{-rt_k} N_k(\mathbf{b}_{1k}; \mathbf{R}_{1k}) \\ & - S \frac{\sigma}{2T} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k \delta_{ik} \frac{dN(a_i)}{da_i} \sqrt{t_i} N_{k-1} \left(\tilde{\mathbf{a}}_{1k \setminus \{i\}}; \tilde{\mathbf{R}}_{1k \setminus \{i\}} \right) \end{aligned} \quad (2.43)$$

mit

$$\begin{aligned} b_i &= \frac{\log \frac{S}{S_i^*} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) t_i}{\sigma \sqrt{t_i}} \quad \text{und} \quad a_i = b_i + \sigma \sqrt{t_i}, \\ \mathbf{b}_{1k} &:= (\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_{k-1}, \tilde{b}_k), \quad \tilde{b}_i = \delta_{ik} b_i, \quad i = 1, \dots, k, \\ \mathbf{a}_{1k} &:= (\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_{k-1}, \tilde{a}_k), \quad \tilde{a}_i = \delta_{ik} a_i, \quad i = 1, \dots, k, \\ \tilde{\mathbf{b}}_{1k \setminus \{i\}} &= \left(\underbrace{\frac{\tilde{b}_1 - \rho_{i1} \tilde{b}_i}{\sqrt{1 - \rho_{i1}^2}} \dots \overset{\text{ohne } i}{\downarrow} \dots}_{\tilde{\mathbf{b}}_{1i \setminus \{i\}}}, \underbrace{\frac{\tilde{b}_{k-1} - \rho_{i,k-1} \tilde{b}_i}{\sqrt{1 - \rho_{i,k-1}^2}}, \frac{\tilde{b}_k - \rho_{ik} \tilde{b}_i}{\sqrt{1 - \rho_{ik}^2}}}_{\tilde{\mathbf{b}}_{ik \setminus \{i\}}} \right), \\ \tilde{\mathbf{a}}_{1k \setminus \{i\}} &= \left(\underbrace{\frac{\tilde{a}_1 - \rho_{i1} \tilde{a}_i}{\sqrt{1 - \rho_{i1}^2}} \dots \overset{\text{ohne } i}{\downarrow} \dots}_{\tilde{\mathbf{a}}_{1i \setminus \{i\}}}, \underbrace{\frac{\tilde{a}_{k-1} - \rho_{i,k-1} \tilde{a}_i}{\sqrt{1 - \rho_{i,k-1}^2}}, \frac{\tilde{a}_k - \rho_{ik} \tilde{a}_i}{\sqrt{1 - \rho_{ik}^2}}}_{\tilde{\mathbf{a}}_{ik \setminus \{i\}}} \right) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{1k} &= \{\rho_{st} \mid s, t = 1, \dots, k\}, \quad \rho_{st} = \delta_{sk} \delta_{kt} \sqrt{\frac{t_{\min\{s;t\}}}{t_{\max\{s;t\}}}}, \\ \tilde{\mathbf{R}}_{1k \setminus \{i\}} &= \left\{ \frac{\rho_{st} - \rho_{is} \rho_{it}}{\sqrt{(1 - \rho_{is}^2)(1 - \rho_{it}^2)}} \mid s, t = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, k \right\}. \end{aligned}$$

Kapitel 2. Sensitivitäten der n -Bermuda-Put-Option

Aus Vollständigkeitsgründen seien hier noch die alternativen Darstellungen (vor allem weil sie den Darstellungen von Geske und Johnson [41] sehr ähneln) der partiellen Ableitungen nach der Volatilität σ und der Restlaufzeit T präsentiert:

$$\frac{\partial P_n}{\partial \sigma} = -K \sum_{k=1}^n e^{-rt_k} \sum_{i=1}^k \delta_{ik} \frac{dN(b_i)}{db_i} \sqrt{t_i} N_{k-1} \left(\tilde{\mathbf{b}}_{1k \setminus \{i\}}; \tilde{\mathbf{R}}_{1k \setminus \{i\}} \right), \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_n}{\partial T} = & -K \frac{r}{T} \sum_{k=1}^n t_k e^{-rt_k} N_k(\mathbf{b}_{1k}; \mathbf{R}_{1k}) \\ & - K \frac{\sigma}{2T} \sum_{k=1}^n e^{-rt_k} \sum_{i=1}^k \delta_{ik} \frac{dN(b_i)}{db_i} \sqrt{t_i} N_{k-1} \left(\tilde{\mathbf{b}}_{1k \setminus \{i\}}; \tilde{\mathbf{R}}_{1k \setminus \{i\}} \right). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Die in Formeln (2.44) und (2.45) verwendeten Terme lassen sich auch in der Originalarbeit von Geske und Johnson [41] finden. Wir vermuten obendrein, dass der von Geske und Johnson nicht weiter ausgeführte Term w'_2 folgende Darstellung besitzen muss¹

$$w'_2 = - \sum_{k=1}^n e^{-rkT/n} \sum_{i=1}^k \delta_{ik} \frac{dN(b_i)}{db_i} \sqrt{\frac{i}{n}} N_{k-1} \left(\tilde{\mathbf{b}}_{1k \setminus \{i\}}; \tilde{\mathbf{R}}_{1k \setminus \{i\}} \right). \quad (2.46)$$

Mit dieser Vermutung können wir die Richtigkeit der von Geske und Johnson angegebenen partiellen Ableitungen insgesamt bestätigen.²

¹ $t_i = iT/n$, $i = 1, \dots, n$ wie in der Originalarbeit von Geske und Johnson.

²Wie sehr sich unsere Herleitungswege dieser Formeln ähneln und auf welchem Wege die Autoren zu ihren Ergebnissen kamen, kann aufgrund der fehlenden Beweise in der Arbeit von Geske und Johnson [41] nicht gesagt werden. Aus der E-Mail-Korrespondenz mit den Autoren lässt sich eher auf einen intuitiven Herleitungsvorgang seitens dieser schließen.

2.3. Beziehungen zwischen den partiellen Ableitungen

Bei einer näheren Betrachtung der Preisformel einer n -Bermuda-Put-Option und deren Ableitungen fallen folgende Zusammenhänge auf

$$P_n = S \frac{\partial P_n}{\partial S} + K \frac{\partial P_n}{\partial K} \quad (2.47)$$

und

$$T \frac{\partial P_n}{\partial T} = r \frac{\partial P_n}{\partial r} + \frac{\sigma}{2} \frac{\partial P_n}{\partial \sigma}. \quad (2.48)$$

An dieser Stelle wollen wir die partielle Differentialgleichung (2.48) auf anderem Wege herleiten. Als Nebeneffekt wird damit die Richtigkeit unserer Berechnungen aus dem vorherigen Abschnitt bestätigt. Außerdem zeigen wir, dass amerikanische Put-Optionen die partielle Differentialgleichung (2.48) ebenso erfüllen.

Lemma 2.28. *Seien \mathcal{Z}_n eine Zerlegung des Intervalls $[0, T]$ und $\mathcal{Z}_{\lambda n} := \{\lambda t \mid t \in \mathcal{Z}_n\}$ eine Zerlegung des Intervalls $[0, \lambda T]$, mit $\lambda > 0$. Es gilt*

$$P_n^{(n)}(S, K, T, r, \sigma) = P_n^{(\lambda n)}\left(S, K, \lambda T, \frac{r}{\lambda}, \frac{\sigma}{\sqrt{\lambda}}\right). \quad (2.49)$$

Beweis. Wir überprüfen die geforderte Gleichheit mit Hilfe der Geske-Johnson-Formel (1.10). Die Matrizen \mathbf{R}_k sind von der Transformation $T \rightarrow \lambda T$ (bzw. $t_i \rightarrow \lambda t_i$, $i = 1, \dots, n$) nicht betroffen. Die Größen rt_i für $i = 1, \dots, n$ sind von der Transformation $T \rightarrow \lambda T$ und $r \rightarrow r/\lambda$ ebenfalls unberührt. Es bleibt noch zu zeigen, dass die Größen a_i und b_i definiert in (1.11) unter der Transformation der Variablen $(T, r, \sigma) \rightarrow (\lambda T, r/\lambda, \sigma/\sqrt{\lambda})$ invariant sind. Da $b_i = a_i - \sigma\sqrt{t_i}$ gilt, reicht es lediglich die Aussage für b_i zu überprüfen. Es gilt für alle $i = 1, \dots, n-1$

$$b_i(S, S_{i,(n)}^*, t_i, r, \sigma) = b_i\left(S, S_{i,(\lambda n)}^*, \lambda t_i, \frac{r}{\lambda}, \frac{\sigma}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

mit

$$b_i(S, S_i^*, t_i, r, \sigma) := \frac{\log \frac{S}{S_i^*} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) t_i}{\sigma \sqrt{t_i}}$$

genau dann, wenn $S_{i,(n)}^* = S_{i,(\lambda n)}^*$ für alle $i = 1, \dots, n-1$ gilt. Dabei sind $S_{i,(n)}^*$ bzw.

$S_{i,(\lambda n)}^*$ die eindeutigen Lösungen von

$$K - S_{i,(\lambda n)}^* = P_{n-i}^{(n)}(S_{i,(\lambda n)}^*, K, T_i, r, \sigma)$$

bzw.

$$K - S_{i,(\lambda n)}^* = P_{n-i}^{(\lambda n)} \left(S_{i,(\lambda n)}^*, K, \lambda T_i, \frac{r}{\lambda}, \frac{\sigma}{\sqrt{\lambda}} \right).$$

Wir gehen nun induktiv vor und starten mit dem vorletzten Ausübungszeitpunkt. Zunächst ist der letzte kritische Preis $S_{n,(n)}^* = K$ invariant gegenüber der Transformation $(T, r, \sigma) \rightarrow (\lambda T, r/\lambda, \sigma/\sqrt{\lambda})$. Somit ist die europäische Put-Option P_1 ebenso invariant bezüglich dieser Transformation. Daher folgt

$$K - S_{n-1,(n)}^* = P_1^{(n)}(S_{n-1,(n)}^*, K, T_{n-1}, r, \sigma)$$

und

$$\begin{aligned} K - S_{n-1,(\lambda n)}^* &= P_1^{(\lambda n)} \left(S_{n-1,(\lambda n)}^*, K, \lambda T_{n-1}, \frac{r}{\lambda}, \frac{\sigma}{\sqrt{\lambda}} \right) \\ &= P_1^{(n)}(S_{n-1,(\lambda n)}^*, K, T_{n-1}, r, \sigma). \end{aligned}$$

Die Gleichung $K - S = P_1^{(n)}(S, K, T, r, \sigma)$ besitzt nach Satz 3.1 eine eindeutige Lösung. Daraus folgt $S_{n-1,(n)}^* = S_{n-1,(\lambda n)}^*$.

Ferner ist die 2-Bermuda-Put-Option P_2 eine Funktion von S_{n-1}^* und P_1 . Da die letzten beiden Größen bezüglich der Variablentransformation $(T, r, \sigma) \rightarrow (\lambda T, r/\lambda, \sigma/\sqrt{\lambda})$ invariant sind, ist P_2 von dieser Transformation ebenso nicht betroffen und erfüllt somit Gleichung (2.49).

Eine induktive Fortsetzung dieser Argumentation liefert die Behauptung. □

Bemerkung 2.29. An dieser Stelle möchten wir hervorheben, dass beim Beweis von Lemma 2.28 zusätzlich gezeigt wurde, dass auch der kritische Rand unter der Transformation der Variablen $(T, r, \sigma) \rightarrow (\lambda T, r/\lambda, \sigma/\sqrt{\lambda})$ invariant ist.

Dazu seien \mathcal{Z}_n eine Zerlegung des Intervalls $[0, T]$, $\mathcal{Z}_{\lambda n} := \{\lambda t \mid t \in \mathcal{Z}_n\}$ eine Zerlegung des Intervalls $[0, \lambda T]$ und $T_i = T - t_i$. Es gilt

$$S_{i,(n)}^*(T_i, r, \sigma) = S_{i,(\lambda n)}^*(\lambda T_i, r/\lambda, \sigma/\sqrt{\lambda}). \quad (2.50)$$

Dabei bezeichnet $S_{i,(n)}^*$ (bzw. $S_{i,(\lambda n)}^*$) den kritischen Preis zur Zeit t_i (bzw. λt_i) zur Zerlegung \mathcal{Z}_n (bzw. $\mathcal{Z}_{\lambda n}$).

2.3 Beziehungen zwischen den partiellen Ableitungen

Lemma 2.30. *Es gilt*

$$P^A(S, K, T, r, \sigma) = P^A\left(S, K, \lambda T, \frac{r}{\lambda}, \frac{\sigma}{\sqrt{\lambda}}\right). \quad (2.51)$$

Beweis. Durch den Grenzübergang auf beiden Seiten von Gleichung (2.49) folgt die Behauptung. □

Bemerkung 2.31. Gleichung (2.51) kann auch direkt aus

$$P^A(S, K, T, r, \sigma) = \sup_{\tau \in S_{0,T}} \mathbb{E}^* \left[e^{-r\tau} (K - S_\tau)^+ \mid S_0 = S \right]$$

mit Hilfe der Skalierungseigenschaft der Brownschen Bewegung $W_{\lambda t} \sim \sqrt{\lambda} W_t$ für alle $t \in [0, T]$ gewonnen werden, denn es gilt

$$\exp \left\{ \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W(t) \right\} \sim \exp \left\{ \left(\frac{r}{\lambda} - \frac{\sigma^2}{2\lambda} \right) \lambda t + \frac{\sigma}{\sqrt{\lambda}} W(\lambda t) \right\}.$$

Das Zeichen \sim steht dabei für „hat die gleiche Verteilung wie“.

Lemma 2.32. *Für die amerikanische Put-Option gilt*

$$T \frac{\partial P^A}{\partial T} = r \frac{\partial P^A}{\partial r} + \frac{\sigma}{2} \frac{\partial P^A}{\partial \sigma}. \quad (2.52)$$

Beweis. Das Differenzieren der beiden Seiten von Gleichung (2.51) nach λ und das anschließende Setzen von $\lambda = 1$ führt zur Behauptung. □

Bemerkung 2.33. Nach unserem bisherigen Wissensstand, wurde die partielle Differentialgleichung (2.52) noch nicht in der Literatur behandelt. Die Information, wonach der Preis einer amerikanischen Put-Option entlang der Kurven $\gamma_{r,\sigma,T}(s) = (Ts, r/s, \sigma/\sqrt{s})$ einen konstanten Verlauf hat, kann bei der Suche nach der analytischen Formel behilflich sein. Außerdem ist die Relation zwischen den partiellen Ableitungen sowohl für die numerische Bestimmung des kritischen Randes, als auch für die Intuition der Definition des kritischen Randes nach Bunch und Johnson [19] wichtig. Die Autoren haben den kritischen Preis zur Zeit t als den größten Aktienpreis definiert, für welchen der Preis

einer amerikanischen Put-Option nicht von der Restlaufzeit abhängt¹(vgl. [19]), d.h.

$$T \frac{\partial P^A(S = S_0^*)}{\partial T} = 0. \quad (2.53)$$

Konkret bedeutet dies, dass bei optimaler Ausübung einer Option, es dem Besitzer der Option unwichtig ist, wie lange diese noch „lebt“. Andersherum heißt es, dass der Zinseffekt zur Zeit der optimalen Ausübung durch den Volatilitätseffekt ausgeglichen wird. Diese Interpretation wird auch analytisch mittels Relation (2.52) bestätigt, denn für $S = S_0^*$ gilt

$$r \frac{\partial P^A(S = S_0^*)}{\partial r} + \frac{\sigma}{2} \frac{\partial P^A(S = S_0^*)}{\partial \sigma} = 0. \quad (2.54)$$

Weiterhin haben Bunch und Johnson [19] aus

$$\frac{\partial P^A(S = S_0^*)}{\partial T} = 0 \quad (2.55)$$

den kritischen Rand numerisch berechnet. Hierfür kann sicherlich auch Relation (2.54) verwendet werden, vor allem wenn die genauen Schätzer für die partiellen Ableitungen nach r und σ bekannt sind.

Ein weiterer möglicher Ansatz ist es die partielle Differentialgleichung (2.52) zu untersuchen und ausgehend von einer Anfangsbedingung neue Erkenntnisse über den Preis einer amerikanischen Put-Option oder eventuell sogar eine analytische Darstellung für die Preisformel zu gewinnen.

Gesucht ist somit eine Funktion $f: \mathbb{R}_+^5 \rightarrow \mathbb{R}_+$, $(S, K, T, r, \sigma) \mapsto f(S, K, T, r, \sigma)$ mit

$$T f_T - r f_r - \frac{\sigma}{2} f_{\sigma} = 0. \quad (2.56)$$

Das ist eine homogene lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung. Ein naheliegender Ansatz ist es daher die Methode der Charakteristiken zu verwenden. Das charakteristische System für die partielle Differentialgleichung (2.56) lautet

$$\dot{S} = 0, \quad \dot{K} = 0, \quad \dot{T} = T, \quad \dot{r} = -r, \quad \dot{\sigma} = -\frac{\sigma}{2}$$

und besitzt die allgemeine Lösung (charakteristische Kurven)

¹Die analytische Herleitung der Definition von Bunch und Johnson kann wie folgt stattfinden (vgl. [44], [74]): Sei τ die Restlaufzeit, aus $P^A(S^*(\tau), \tau) = K - S^*(\tau)$ folgt

$$\frac{dP^A(S^*(\tau), \tau)}{d\tau} = \frac{\partial P^A(S^*(\tau), \tau)}{\partial \tau} + \frac{\partial P^A(S^*(\tau), \tau)}{\partial S} \frac{dS^*(\tau)}{d\tau} = -\frac{dS^*(\tau)}{d\tau}$$

und mit $\frac{\partial P^A(S^*(\tau), \tau)}{\partial S} = -1$ folgt $\frac{\partial P^A(S^*(\tau), \tau)}{\partial \tau} = 0$.

2.3 Beziehungen zwischen den partiellen Ableitungen

$$S(t) = C_1, \quad K(t) = C_2, \quad T(t) = C_3 e^t, \quad r(t) = C_4 e^{-t}, \quad \sigma(t) = C_5 e^{-\frac{t}{2}} \quad (2.57)$$

mit den Konstanten C_1, \dots, C_5 . Hieraus folgt zum einen, dass auf eine der drei Variablen T, r, σ verzichtet werden kann und zum anderen, dass die Anfangsbedingung nicht bei $r = 0$ (entsprechend $T, \sigma = 0$) starten darf, um die lokale Invertierbarkeit (siehe unten) nicht zu verletzen.

Sei nun die Anfangsbedingung

$$f(S, K, T, \epsilon, \sigma) = g_\epsilon(S, K, T, \sigma) \quad (2.58)$$

mit $g_\epsilon \in C^1(\mathbb{R}_+^4)$, $\epsilon > 0$ gegeben¹. Dann folgt daraus und aus den charakteristischen Gleichungen (2.57) für die Lösung von f

$$f(S, K, T, r, \sigma) = g_\epsilon \left(S, K, \frac{Tr}{\epsilon}, \sigma \sqrt{\frac{\epsilon}{r}} \right). \quad (2.59)$$

Falls beispielsweise $g_\epsilon(S, K, T, \sigma) = p^E(S, K, T, r = \epsilon, \sigma)$ gilt, wobei p^E den Preis einer europäischen Put-Option bezeichnet, so folgt daraus

$$f(S, K, T, r, \sigma) = p^E(S, K, T, r, \sigma).$$

Dieses Ergebnis steht mit Gleichung (2.49) im Einklang, wonach gilt

$$p^E(S, K, T, r, \sigma) = p^E \left(S, K, \lambda T, \frac{r}{\lambda}, \frac{\sigma}{\sqrt{\lambda}} \right), \quad \forall \lambda > 0.$$

Wären wir in der Lage gewesen als Anfangskurve $g_\epsilon(S, K, T, \sigma)$ den Preis einer amerikanischen Put-Option $P^A(S, K, T, r = \epsilon, \sigma)$ für einen festen Zinssatz $r = \epsilon$ (alternativ $T, \sigma = \epsilon$) anzugeben, so hätten wir den Preis einer amerikanischen Put-Option als Lösung der Differentialgleichung (2.56) erhalten. Leider ist der Preis einer amerikanischen Put-Option nur in einigen wenigen Fällen explizit bekannt (am Rand $r, \sigma, T = 0$ oder im Grenzfall für $r, \sigma, T \rightarrow \infty$). In diesen Fällen scheitert die Methode der Charakteristiken, da die lokale Invertierbarkeit verletzt ist.

Partielle Black-Scholes-Differentialgleichung und n -Bermuda-Put-Option

Geske und Johnson [41] haben behauptet, dass eine n -Bermuda-Put-Option die partielle Black-Scholes-Differentialgleichung auf der Menge $\{S_0 > S_{0,(n)}^*\}$ erfüllt, d.h.

$$\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P_n}{\partial S^2} + rS \frac{\partial P_n}{\partial S} - rP_n - \frac{\partial P_n}{\partial T} \stackrel{!}{=} 0. \quad (2.60)$$

¹ Alternativ sei die Anfangsbedingung für ein festes T oder $\sigma > 0$ gegeben.

Kapitel 2. Sensitivitäten der n -Bermuda-Put-Option

Wir wollen hier diese Aussage verifizieren. Mit der Relation

$$P_n = S \frac{\partial P_n}{\partial S} + K \frac{\partial P_n}{\partial K} \quad (2.61)$$

kann Gleichung (2.60) wie folgt umgeformt werden

$$\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P_n}{\partial S^2} - r K \frac{\partial P_n}{\partial K} - \frac{\partial P_n}{\partial T} \stackrel{!}{=} 0. \quad (2.62)$$

Zu untersuchen ist nun, ob die n -Bermuda-Put-Option diese letzte partielle Differentialgleichung erfüllt.

Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_n}{\partial K} &= \sum_{k=1}^n e^{-rt_k} N_k(\mathbf{b}_{1k}; \mathbf{R}_{1k}), \\ \frac{\partial P_n}{\partial T} &= -rK \sum_{k=1}^n \frac{t_k}{T} e^{-rt_k} N_k(\mathbf{b}_{1k}; \mathbf{R}_{1k}) \\ &\quad - S \frac{\sigma}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k \delta_{ik} \frac{dN(a_i)}{da_i} \frac{1}{\sqrt{t_i}} \frac{t_i}{T} N_{k-1}(\tilde{\mathbf{a}}_{1k \setminus \{i\}}; \tilde{\mathbf{R}}_{1k \setminus \{i\}}) \\ \frac{\partial^2 P_n}{\partial S^2} &= -\frac{1}{S\sigma} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k \delta_{ik} \frac{dN(a_i)}{da_i} \frac{1}{\sqrt{t_i}} N_{k-1}(\tilde{\mathbf{a}}_{1k \setminus \{i\}}; \tilde{\mathbf{R}}_{1k \setminus \{i\}}). \end{aligned}$$

Insgesamt gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P_n}{\partial S^2} - rK \frac{\partial P_n}{\partial K} - \frac{\partial P_n}{\partial T} &= -S \frac{\sigma}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k \delta_{ik} \frac{dN(a_i)}{da_i} \frac{1}{\sqrt{t_i}} N_{k-1}(\tilde{\mathbf{a}}_{1k \setminus \{i\}}; \tilde{\mathbf{R}}_{1k \setminus \{i\}}) \\ &\quad - rK \sum_{k=1}^n e^{-rt_k} N_k(\mathbf{b}_{1k}; \mathbf{R}_{1k}) \\ &\quad + rK \sum_{k=1}^n \frac{t_k}{T} e^{-rt_k} N_k(\mathbf{b}_{1k}; \mathbf{R}_{1k}) \\ &\quad + S \frac{\sigma}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k \delta_{ik} \frac{dN(a_i)}{da_i} \frac{1}{\sqrt{t_i}} \frac{t_i}{T} N_{k-1}(\tilde{\mathbf{a}}_{1k \setminus \{i\}}; \tilde{\mathbf{R}}_{1k \setminus \{i\}}) \\ &= S \frac{\sigma}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k \delta_{ik} \frac{dN(a_i)}{da_i} \frac{1}{\sqrt{t_i}} \left(\frac{t_i}{T} - 1 \right) N_{k-1}(\tilde{\mathbf{a}}_{1k \setminus \{i\}}; \tilde{\mathbf{R}}_{1k \setminus \{i\}}) \\ &\quad + rK \sum_{k=1}^n \left(\frac{t_k}{T} - 1 \right) e^{-rt_k} N_k(\mathbf{b}_{1k}; \mathbf{R}_{1k}). \end{aligned} \quad (2.63)$$

2.3 Beziehungen zwischen den partiellen Ableitungen

Die Frage ist nun, ob und für welche n der Ausdruck

$$\begin{aligned} S \frac{\sigma}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k \delta_{ik} \frac{dN(a_i)}{da_i} \frac{1}{\sqrt{t_i}} \left(\frac{t_i}{T} - 1 \right) N_{k-1} \left(\tilde{\mathbf{a}}_{1k \setminus \{i\}}; \tilde{\mathbf{R}}_{1k \setminus \{i\}} \right) \\ + rK \sum_{k=1}^n \left(\frac{t_k}{T} - 1 \right) e^{-rt_k} N_k(\mathbf{b}_{1k}; \mathbf{R}_{1k}) \end{aligned} \quad (2.64)$$

verschwindet. Für $n = 1$ ist dies der Fall, also für eine europäische Put-Option, denn dann ist $t_1 = T$ und $\frac{t_1}{T} = 1$, womit die beiden Terme in (2.64) zu Nulltermen werden. Für den Fall $n = 2$ gilt das allerdings nicht mehr, was das folgende numerische Beispiel belegt.

Beispiel 2.34. Seien $n = 2$, die Zerlegung $\mathcal{Z}_2 = \{0, T/2, T\}$ und die übrigen Parameter $S = 100$, $K = 100$, $r = 0.04$, $\sigma = 0.2$ und $T = 1$ gegeben. Das Einsetzen dieser Parameter in Formel (2.64) ergibt

$$\frac{1}{2} S \frac{\sigma}{2} \frac{dN(a_1)}{da_1} \frac{1}{\sqrt{T/2}} (1 - N(\tilde{\mathbf{a}}_{12 \setminus \{1\}})) - \frac{1}{2} r K e^{-rT/2} N(\mathbf{b}_{11}), \quad (2.65)$$

mit

$$\begin{aligned} \frac{dN(a_1)}{da_1} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a_1^2/2}, & a_1 &= \frac{\log \frac{S}{S_{T/2}^*} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) T/2}{\sigma \sqrt{T/2}}, \\ \tilde{\mathbf{a}}_{12 \setminus \{1\}} &= -\frac{\log \frac{S_{T/2}^*}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) T/2}{\sigma \sqrt{T/2}}, & \mathbf{b}_{11} &= -\frac{\log \frac{S}{S_{T/2}^*} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) T/2}{\sigma \sqrt{T/2}}. \end{aligned}$$

Die einzige verbleibende unbekannte Größe ist der kritische Preis $S_{T/2}^*$ zur Zeit $T/2$. Dieser berechnet sich aus

$$K - S_{T/2}^* = p^E(S_{T/2}^*, K, T/2, \sigma, r), \quad (2.66)$$

wobei p^E der Preis einer europäischen Put-Option ist. Die Berechnung des kritischen Preises und der anderen auftretenden Funktionen kann beliebig genau durchgeführt werden. Für $S_{T/2}^*$ gilt bis auf die 15-te Nachkommastelle genau (berechnet mit Newton-Raphson-Methode)

$$S_{T/2}^* = 89.144467889928990 \quad (2.67)$$

und somit für die Differenz aus (2.65) bis auf die 5-te Nachkommastelle genau

$$\frac{1}{2}S\frac{\sigma}{2}\frac{dN(a_1)}{da_1}\frac{1}{\sqrt{T/2}}(1 - N(\tilde{\mathbf{a}}_{12\setminus\{1\}})) - \frac{1}{2}rKe^{-rT/2}N(\mathbf{b}_{11}) = 0.0878.$$

Mit diesem Beispiel wurde gezeigt, dass der Ausdruck aus (2.64) nicht für alle $n \in \mathbb{N}$ null wird. Das Ergebnis steht nicht im Einklang mit einer der Aussagen von Geske und Johnson [41]. Denn, wie schon erwähnt, haben die Autoren behauptet, dass die partiellen Ableitungen (2.39)–(2.43) die partielle Black-Scholes-Differentialgleichung (2.60) erfüllen. Ob die Gleichung für alle $n \in \mathbb{N}$ oder nur für ganz bestimmte n erfüllt sein sollte, geht aus der Arbeit allerdings nicht hervor. Das ist zum Teil auch auf die nicht eindeutige Notation der Autoren zurückzuführen.

3. Kritischer Rand

In früheren Kapiteln haben wir sowohl die Existenz, als auch die Eindeutigkeit des kritischen Randes $(S_{i,(n)}^*)_{0 \leq i \leq n}$ einer n -Bermuda-Put-Option vorausgesetzt. In diesem Kapitel werden die fehlenden Beweise präsentiert. Darüber hinaus werden weitere Eigenschaften (wie etwa Monotonie und Homogenität) des kritischen Randes bewiesen.

3.1. Existenz und Eindeutigkeit

Der kritische Preis S_i^* zur Zeit $t_i^{(n)}$ wurde als Lösung der folgenden Gleichung definiert

$$P_{n-i}^{(n)}(S_i^*, K, T_i) = (K - S_i^*)^+, \quad (3.1)$$

mit der Restlaufzeit $T_i := T - t_i$ und dem Preis einer $(n - i)$ -Bermuda-Put-Option $P_{n-i}^{(n)}$ zur Zeit t_i mit den Ausübungsmöglichkeiten in $t_{i+1}^{(n)}, \dots, t_n^{(n)}$. Die kritischen Preise werden rekursiv aus Formel (3.1) berechnet. Rekursiv heißt dabei, dass zunächst der kritische Preis S_{n-1}^* , ausgehend von der Anfangsbedingung $S_n^* = K$ berechnet wird, dann S_{n-2}^* usw.

Die partielle Ableitung einer n -Bermuda-Put-Option nach dem Aktienkurs S ist gegeben durch

$$\frac{\partial P_n^{(n)}}{\partial S} = - \sum_{k=1}^n N_k(a_{1k}; \mathbf{R}_{1k}) = N_n(\hat{\mathbf{a}}_{1n}; \hat{\mathbf{R}}_{1n}) - 1 < 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Das Vorzeichen gilt ebenso für den Fall $\frac{\partial P_{n-i}^{(n)}}{\partial S}$ für alle $i = 1, \dots, n - 1$, denn $P_{n-i}^{(n)}$ kann nach Lemma 1.13 (Homogenität in der Zeit) als eine $(n - i)$ -Bermuda-Put-Option $P_{n-i}^{(n-i)}$ mit den Ausübungsmöglichkeiten in $t_1^{(n-i)}, \dots, t_{n-i}^{(n-i)}$ aufgefasst werden. Es soll zusätzlich nur die Bedingung der Ausübung in gleichen Zeitabständen, d.h.

$$t_k^{(n-i)} - t_{k-1}^{(n-i)} = t_{i+k}^{(n)} - t_{i+k-1}^{(n)} \quad \text{für alle } k = 1, \dots, n - i,$$

erfüllt sein.

Speziell für $i = n - 1$ folgt, dass die Funktion $P_1^{(n)}(S)$ streng monoton fallend ist. Weiterhin gilt $P_1^{(n)}(S) \geq 0$ und $\lim_{S \rightarrow 0} P_1^{(n)}(S) = e^{-rT_{n-1}} K > 0$ für $K > 0$. Daraus folgt, dass $P_1^{(n)}(S) > 0$ für alle $S \in [0, \infty)$ ist. Für die Funktion $f(S) := P_1^{(n)}(S, K, T_{n-1}) - (K - S)^+$

Kapitel 3. Kritischer Rand

gilt somit $\lim_{S \rightarrow 0} f(S) < 0$ und $f(S) > 0$ für alle $S \geq K$. Daher existiert ein $S \in (0, K)$ mit $f(S) = 0$. Aus $\partial f / \partial S = N(a) > 0$ mit a definiert wie in (2.2) folgt weiter, dass es nur ein $S \in (0, K)$ mit $f(S) = 0$ gibt. Diese Nullstelle nennen wir kritischer Preis zur Zeit t_{n-1} und bezeichnen sie mit $S_{n-1,(n)}^*$, d.h.

$$\begin{aligned} P_1^{(n)}(S, K, T_{n-1}) &< K - S \quad \text{falls} \quad S < S_{n-1,(n)}^* \\ P_1^{(n)}(S, K, T_{n-1}) &> K - S \quad \text{falls} \quad S > S_{n-1,(n)}^* \\ P_1^{(n)}(S, K, T_{n-1}) &= K - S \quad \text{falls} \quad S = S_{n-1,(n)}^* . \end{aligned}$$

Es seien nun die kritischen Preise $S_{i+1,(n)}^*, S_{i+2,(n)}^*, \dots, S_{n-1,(n)}^*, S_{n,(n)}^*$ gegeben. Der Preis einer $(n-i)$ -Bermuda-Put-Option $P_{n-i}^{(n)}$ und dessen Ableitung nach dem Aktienkurs S können somit nach Formeln (1.25) und (2.24) berechnet werden. Wir erwähnen an dieser Stelle, dass der kritische Preis $S_{i,(n)}^*$ nicht in Preisformel (1.25) und somit auch nicht in der Ableitung von $P_{n-i}^{(n)}$ nach dem Aktienkurs S vorhanden ist. Die Argumentation für die Existenz und Eindeutigkeit von $S_{i,(n)}^*$ funktioniert genau wie für $S_{n-1,(n)}^*$. Auf $(0, K)$ gilt $\partial f / \partial S = N_{n-i}(\hat{\mathbf{a}}_{1,n-i}; \hat{\mathbf{R}}_{1,n-i}) > 0$ mit $f(S) := P_{n-i}^{(n)}(S, K, T_i) - (K - S)^+$. Gemeinsam mit $\lim_{S \rightarrow 0} f(S) < 0$ und $f(S) > 0$ für $S \geq K$ folgt daher, dass genau eine Nullstelle im Intervall $(0, K)$ existiert.

Dieses Resultat halten wir im nächsten Satz fest.

Satz 3.1. *Für jedes $k = 1, \dots, n-1$ existiert eine eindeutige Lösung $S_{k,(n)}^* \in (0, K)$ der Gleichung*

$$P_{n-k}^{(n)}(S, K, T_k) = (K - S)^+ . \quad (3.2)$$

Diese eindeutige Lösung $S_{k,(n)}^$ wird kritischer Preis einer n -Bermuda-Put-Option zum Zeitpunkt t_k genannt.*

Bemerkung 3.2. Die Folge $S_{(n)}^* := (S_{k,(n)}^*)_{1 \leq k \leq n}$ der kritischen Preise einer n -Bermuda-Put-Option nennen wir kritischer Rand einer n -Bermuda-Put-Option oder kurz kritischer Rand. Um die Abhängigkeit einer Bermuda-Put-Option vom kritischen Rand zu betonen, werden wir gelegentlich $P_n^{(n)}(\cdot; S^*)$ schreiben.

Lemma 3.3 (Optimalität des kritischen Randes). *Es seien $S^* := (S_{k,(n)}^*)_{1 \leq k \leq n}$ der kritische Rand einer n -Bermuda-Put-Option $P_n^{(n)}$ und $\hat{S} := (\hat{S}_{k,(n)})_{1 \leq k \leq n}$ eine (deterministische) Folge mit Werten in $[0, K]$. Dann gilt*

$$P_n^{(n)}(S_0, K, T; S^*) \geq P_n^{(n)}(S_0, K, T; \hat{S}) . \quad (3.3)$$

Beweis. Die Behauptung folgt direkt aus den Definitionen des kritischen Randes und des Preises einer n -Bermuda-Put-Option. \square

3.2. Monotonie

Der Beweis der Monotonie des kritischen Randes funktioniert auf eine ähnliche Weise wie der einer amerikanischen Option. Daher erläutern wir zunächst die Intuition anhand des Beispiels einer amerikanischen Option, um anschließend den Beweis für die Bermuda-Option herzuleiten.

Es seien zwei amerikanische Optionen $P^A(S, \tau_1)$ und $P^A(S, \tau_2)$ mit verschiedenen Restlaufzeiten τ_1 und τ_2 , aber sonst gleichen Parametern gegeben. Angenommen es gilt $\tau_1 \leq \tau_2$, dann ist $P^A(S, \tau_2)$ wertvoller als $P^A(S, \tau_1)$. Bei einer optimalen Ausübung der Option mit der längeren Laufzeit $P^A(S, \tau_2)$ ist auch die Ausübung der Option mit der kürzeren Laufzeit $P^A(S, \tau_1)$ optimal (vgl. zum Beispiel [26]). Weiterhin sei $S_{\tau_2}^*$ der kritische Preis der Option $P^A(S, \tau_2)$. Dann gilt

$$K - S_{\tau_2}^* = P^A(S_{\tau_2}^*, \tau_2) \geq P^A(S_{\tau_2}^*, \tau_1)$$

und gemeinsam mit der Tatsache, dass der Preis einer amerikanischen Put-Option größer oder mindestens gleich ihrem inneren Wert ist, folgt $P^A(S_{\tau_2}^*, \tau_1) = K - S_{\tau_2}^*$. Nach der Definition des kritischen Preises $S_{\tau_1}^*$ der Option $P^A(S, \tau_1)$ gilt weiterhin

$$S_{\tau_1}^* = \sup \{S \mid P^A(S, \tau_1) = K - S\},$$

woraus dann folgt $K - S_{\tau_1}^* \leq K - S_{\tau_2}^*$ und damit $S_{\tau_1}^* \geq S_{\tau_2}^*$.

In der nachfolgenden Abbildung (Abb. 3.1) wird die obige Intuition noch einmal anschaulich dargestellt.

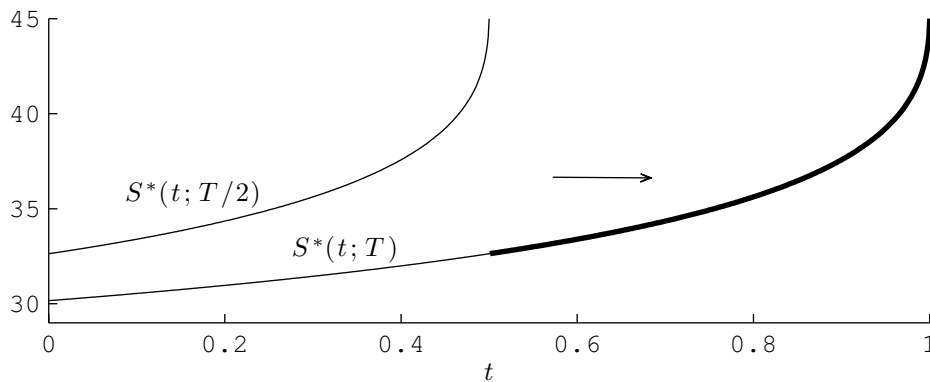


ABBILDUNG 3.1.: KRITISCHE RÄNDER ZWEIER AMERIKANISCHEN PUT-OPTIONEN MIT VERSCHIEDENEN LAUFZEITEN BEI SONST GLEICHEN PARAMETERN $K = 45$, $r = 0.04$, $\sigma = 0.3$, $T = 1$.

Kapitel 3. Kritischer Rand

Lemma 3.4 (Monotonie). *Es sei \mathcal{Z}_n eine äquidistante Zerlegung des Intervalls $[0, T]$. Es gilt*

$$0 \leq S_{1,(n)}^* \leq S_{2,(n)}^* \leq \dots \leq S_{n-1,(n)}^* \leq S_{n,(n)}^* = K, \quad (3.4)$$

wobei $S_{i,(n)}^*$ den kritischen Preis zur Zeit $t_i^{(n)}$ einer n -Bermuda-Put-Option bezeichnet.

Beweis. Angenommen, es gilt $S_{i+1,(n)}^* < S_{i,(n)}^*$. Dann existiert ein S , so dass $S_{i+1,(n)}^* < S < S_{i,(n)}^*$ gilt. Für dieses S folgt jedoch

$$P_{n-(i+1)}^{(n)}(S, K, T_{i+1}) > K - S > P_{n-i}^{(n)}(S, K, T_i),$$

was im Widerspruch zu $P_{n-(i+1)}^{(n)}(S, K, T_{i+1}) \leq P_{n-i}^{(n)}(S, K, T_i)$ steht. □

Lemma 3.5. *Es sei $\mathcal{Z}_n := \{t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n\}$ eine Zerlegung des Intervalls $[0, T]$ und $\tilde{\mathcal{Z}}_{n+1} := \{\tilde{t}_0, \tilde{t}_1, \dots, \tilde{t}_n, \tilde{t}_{n+1}\}$ eine weitere Zerlegung mit $t_i = \tilde{t}_i$ für $i = 0, 1, \dots, k$ und $t_i = \tilde{t}_{i+1}$ für $i = k+1, \dots, n$. Die Zerlegung $\tilde{\mathcal{Z}}_{n+1}$ entsteht somit aus \mathcal{Z}_n durch das Hinzufügen eines weiteren Punktes zwischen t_k und t_{k+1} . Es gilt*

$$S_{1,(\tilde{n})}^* \leq S_{1,(n)}^*, \dots, S_{k,(\tilde{n})}^* \leq S_{k,(n)}^* \quad \text{und} \quad S_{k+2,(\tilde{n})}^* = S_{k+1,(n)}^*, \dots, S_{n+1,(\tilde{n})}^* = S_{n,(n)}^*.$$

Dabei bezeichnen $S_{i,(n)}^*$ und $S_{i,(\tilde{n})}^*$ die kritischen Preise (zur Zeit t_i) der Bermuda-Put-Optionen zu Zerlegungen \mathcal{Z}_n und $\tilde{\mathcal{Z}}_{n+1}$.

Beweis. Die Behauptung folgt aus $P_{n-i}(S, K, T_i; \mathcal{Z}_n) \leq P_{n-i+1}(S, K, \tilde{T}_i; \tilde{\mathcal{Z}}_{n+1})$ für alle $i = 1, \dots, k$ und aus $P_{n-i}(S, K, T_i; \mathcal{Z}_n) = P_{n-i}(S, K, \tilde{T}_{i+1}; \tilde{\mathcal{Z}}_{n+1})$ für alle $i = k+1, \dots, n$. □

Bemerkung 3.6. Zur Vereinfachung sei die Zerlegung $\mathcal{Z}_n := \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ für den Rest dieses Kapitels äquidistant. Wir halten dies fest und lassen der besseren Übersicht wegen den auf diese Zerlegung deutenden Index $\cdot^{(n)}$ bzw. $\cdot_{(n)}$ weg.

3.3. Weitere Eigenschaften des kritischen Randes

Wie oben bereits gezeigt wurde, sind die kritischen Preise S_k^* mit $k = 1, \dots, n-1$ eindeutig durch die Gleichungen

$$P_{n-k}(S_k, K, T_k) = K - S_k, \quad k = 1, \dots, n-1 \quad (3.5)$$

festgelegt.

3.3 Weitere Eigenschaften des kritischen Randes

Der kritische Preis S_k^* zur Zeit t_k ist eine Funktion des Zinssatzes r , der Volatilität σ und des Ausübungspreises K . Wir wollen daher das Verhalten dieser Funktion in Abhängigkeit von diesen drei Parametern untersuchen und starten mit dem Ausübungspreis K .

Lemma 3.7. *Der kritische Preis S_k^* ist eine lineare Funktion des Ausübungspreises K .*

Beweis. Aus

$$K - S_k^*(K) = P_{n-k}(S_k^*(K), K)$$

folgt

$$\lambda K - \lambda S_k^*(K) = \lambda P_{n-k}(S_k^*(K), K)$$

und daraus mit der Homogenitätseigenschaft von P_{n-k}

$$\lambda K - \lambda S_k^*(K) = P_{n-k}(\lambda S_k^*(K), \lambda K).$$

Auf der anderen Seite gilt

$$\lambda K - S_k^*(\lambda K) = P_{n-k}(S_k^*(\lambda K), \lambda K)$$

woraus aufgrund der Eindeutigkeit der Lösung folgt

$$S_k^*(\lambda K) = \lambda S_k^*(K).$$

Somit ist $S_k^*(K, r, \sigma) = K C_k(r, \sigma)$, wobei $C_k(r, \sigma)$ eine Konstante bzgl. K ist. \square

Bemerkung 3.8. Dieses Ergebnis (Linearität in dem Ausübungspreis K) kann ebenfalls auf den kritischen Rand einer amerikanischen Put-Option übertragen werden (vgl. auch [35]). Somit wird die Untersuchung des kritischen Randes einer amerikanischen Put-Option als Funktion von vier Parametern $S^*(K, \tau, r, \sigma)$ auf die Untersuchung der Funktion $S^*(1, \tau, r, \sigma)$, die nur noch von drei Parametern abhängt, zurückgeführt. In Abbildung 3.2 ist eine solche Funktion $C(\tau, r, \sigma)$ als Funktion der Restlaufzeit grafisch dargestellt.

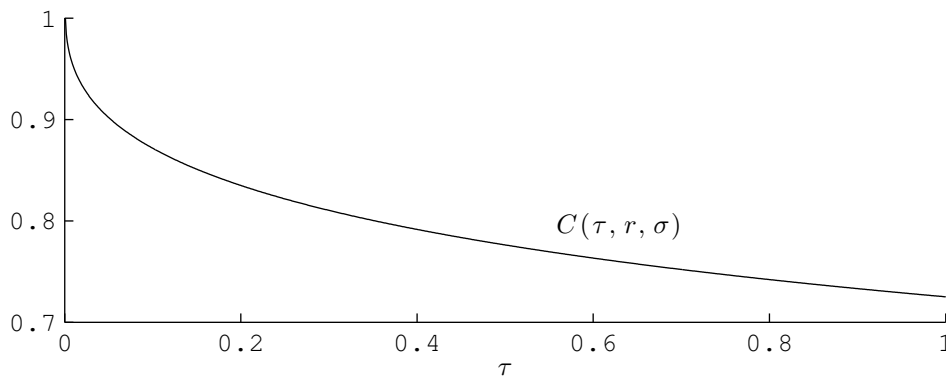


ABBILDUNG 3.2.: KRITISCHER RAND $S^*(1, \tau, r, \sigma)$ BZW. $C(\tau, r, \sigma)$ ALS FUNKTION DER RESTLAUFZEIT. WEITERE PARAMETER SIND $K = 1$, $r = 0.04$, $\sigma = 0.3$, $T = 1$.

Lemma 3.9. *Der kritische Preis S_i^* für $i = 0, 1, \dots, n-1$ ist eine monoton wachsende Funktion des Zinssatzes r und eine monoton fallende Funktion der Volatilität σ . Darüber hinaus ist der kritische Preis S_i^* , $i = 0, 1, \dots, n-1$ partiell nach r und σ differenzierbar.*

Beweis. Wir beginnen mit dem Zinssatz r . Der Übersicht wegen wird eine n -Bermuda-Put-Option lediglich als eine Funktion von S und r betrachtet. Es seien die Zinssätze $r_2, r_1 > 0$ (o.B.d.A. sei $r_1 < r_2$) gegeben. Nach der Definition von S_{n-1}^* gilt

$$\begin{aligned} K - S_{n-1}^*(r_1) &= P_1(S_{n-1}^*(r_1), r_1) \\ K - S_{n-1}^*(r_2) &= P_1(S_{n-1}^*(r_2), r_2). \end{aligned}$$

Aus $P_1(S, r_1) > P_1(S, r_2)$ folgt $S_{n-1}^*(r_1) < S_{n-1}^*(r_2)$ und somit die Monotonie von S_{n-1}^* in r . Weiterhin folgt

$$\begin{aligned} S_{n-1}^*(r_2) - S_{n-1}^*(r_1) &= P_1(S_{n-1}^*(r_1), r_1) - P_1(S_{n-1}^*(r_2), r_2) \\ &\quad + P_1(S_{n-1}^*(r_2), r_1) - P_1(S_{n-1}^*(r_2), r_1) \end{aligned}$$

und daraus nach dem Mittelwertsatz

$$\frac{S_{n-1}^*(r_2) - S_{n-1}^*(r_1)}{r_2 - r_1} = \frac{P_1(S_{n-1}^*(r_2), r_1) - P_1(S_{n-1}^*(r_2), r_2)}{\left(1 + \frac{\partial P_1}{\partial S}(\xi, r_1)\right)(r_2 - r_1)}, \quad (3.6)$$

wobei $\xi \in (S_{n-1}^*(r_1), S_{n-1}^*(r_2))$ ist. Da $r_2 > r_1 > 0$ gilt, $\exists q > 0$ mit $q < \xi$. Gemeinsam mit der Konvexität von P_1 folgt somit $-1 < \frac{\partial P_1}{\partial S}(q, r_1) < \frac{\partial P_1}{\partial S}(\xi, r_1) < \frac{\partial P_1}{\partial S}(S_{n-1}^*(r_2), r_2)$. Das bedeutet, dass der Grenzwert für $r_1 \rightarrow r_2$ auf der linken Seite von Formel (3.6) existiert und daher folgt die Differenzierbarkeit nach dem Zinssatz r

$$\frac{\partial S_{n-1}^*}{\partial r}(r_2) = \frac{-\frac{\partial P_1}{\partial r}(S_{n-1}^*(r_2), r_2)}{1 + \frac{\partial P_1}{\partial S}(S_{n-1}^*(r_2), r_2)} > 0.$$

Eine Eins-zu-eins-Übertragung der obigen Argumentation auf $S_{n-2}^*(r)$ als Lösung von

$$K - S_{n-2}^*(r) = P_2(S_{n-2}^*(r), r)$$

und eine induktive Fortsetzung dieser Argumentation bis $i = 0$ liefert die Behauptung für den Zinssatz r . Der Beweis für die Volatilität σ erfolgt analog, mit der Ausnahme, dass $P_1(S, \sigma_1) < P_1(S, \sigma_2)$ für $\sigma_1 < \sigma_2$ gilt und daher $S_{n-1}^*(\sigma_1) > S_{n-1}^*(\sigma_2)$ ist. Insgesamt folgt somit für ein $\sigma_0 \in (0, \infty)$

$$\frac{\partial S_i^*}{\partial \sigma}(\sigma_0) = \frac{-\frac{\partial P_{n-i}}{\partial \sigma}(S_i^*(\sigma_0), \sigma_0)}{1 + \frac{\partial P_{n-i}}{\partial S}(S_i^*(\sigma_0), \sigma_0)} < 0.$$

□

3.3 Weitere Eigenschaften des kritischen Randes

Im nächsten Lemma wird das Verhalten des kritischen Randes $(S_{i,(n)}^*)_{0 \leq i \leq n}$ als Funktion des Zinssatzes r und der Volatilität σ in Grenzfällen $r = 0, r \rightarrow \infty$ und $\sigma \rightarrow 0, \sigma \rightarrow \infty$ untersucht. Zum Zeitpunkt $t_n = T$ ist der kritische Preis bekannt, er ist gleich dem Ausübungspreis K , d.h. $S_{n,(n)}^* = K$, nach der Definition.

Lemma 3.10. *Sei der Ausübungspreis $K > 0$ fest und $\mathcal{Z}_n := \{0 = t_0, t_1, \dots, t_n = T\}$ eine äquidistante Zerlegung.*

i) Für $r = 0$ gilt

$$S_i^*(\cdot, r) = 0, \quad \text{für alle } i = 0, \dots, n-1. \quad (3.7)$$

ii) Für $r \rightarrow \infty$ gilt

$$\lim_{r \rightarrow \infty} S_i^*(\cdot, r) = K, \quad \text{für alle } i = 0, \dots, n-1. \quad (3.8)$$

iii) Für $\sigma \rightarrow 0$ gilt

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} S_i^*(\cdot, \sigma) = K, \quad \text{für alle } i = 0, \dots, n-1. \quad (3.9)$$

iv) Für $\sigma \rightarrow \infty$ gilt

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} S_i^*(\cdot, \sigma) = K(1 - e^{-r\Delta_n}), \quad \text{für alle } i = 0, \dots, n-1. \quad (3.10)$$

Beweis.

i) Eine europäische Put-Option p^E hat folgende Schranken

$$Ke^{-rT} - S \leq p^E(S, K, T, r, \sigma) \leq K.$$

Für $r = 0$ und $S = 0$ folgt $p^E = K$. Somit hat die Gleichung

$$K - S = p^E(S, K, T, r, \sigma)$$

für $r = 0$ eine Lösung $S = 0$. Da $\frac{\partial p^E}{\partial S} > -1$ für alle $S > 0$ ist, ist dies zudem die einzige Lösung für beliebige Restlaufzeiten $T \in (0, \infty)$.

Es seien $S_{i+1}^* = S_{i+2}^* = \dots = S_{n-1}^* = 0$. Dann ist der Preis einer $(n-i)$ -Bermuda-Put-Option $P_{n-i}(S, K, T_i)$ gleich dem Preis einer europäischen Put-Option mit der Restlaufzeit T_i (vgl. Formel (1.9)). Daher folgt für den kritischen Preis S_i^* , nach der obigen Überlegung, $S_i^* = 0$.

Kapitel 3. Kritischer Rand

- ii) Für den Preis einer n -Bermuda-Put-Option mit den Ausübungsmöglichkeiten in $\{0 < t_1, \dots, t_n = T\}$ gilt zur Zeit $t_0 = 0$

$$0 \leq P_n(S, K, T) = e^{-rt_1} \mathbb{E}^* \left[\max \left\{ K - S_1 ; P_{n-1}(S_1, K, T_1) \right\} \mid S \right] \leq e^{-rt_1} K.$$

Demnach ist $\lim_{r \rightarrow \infty} P_n = 0$ und weiter $S_0^* = K$ für $r \rightarrow \infty$. Die Behauptung ii) folgt nach Lemma 3.4 aufgrund der Monotonie des Randes, d.h. $S_0^* \leq S_1^* \leq \dots \leq S_n^* = K$.

- iii) Für den Preis der europäischen Put-Option P_1 gilt im Falle $\sigma \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma \rightarrow 0} P_1(S_{n-1}, K, T_{n-1}, r, \sigma) &= \lim_{\sigma \rightarrow 0} \left(e^{-r(t_n - t_{n-1})} K N \left(\frac{\log \left(\frac{K}{S_{n-1}} \right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T_{n-1}}{\sigma \sqrt{T_{n-1}}} \right) \right. \\ &\quad \left. - S_{n-1} N \left(\frac{\log \left(\frac{K}{S_{n-1}} \right) - \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) T_{n-1}}{\sigma \sqrt{T_{n-1}}} \right) \right) \\ &= \left(e^{-r(t_n - t_{n-1})} K - S_{n-1} \right)^+. \end{aligned}$$

Für den kritischen Preis S_{n-1}^* folgt somit $\lim_{\sigma \rightarrow 0} S_{n-1}^* = K$. Damit und nach der Definition von P_2 (siehe Formel (1.25)) ergibt sich für den Preis der 2-Bermuda-Put-Option

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} P_2(S_{n-2}, K, T_{n-2}, r, \sigma) = \left(e^{-r(t_{n-1} - t_{n-2})} K - S_{n-2} \right)^+$$

und folglich ist $S_{n-2}^* = K$ für $\sigma \rightarrow 0$. Eine induktive Fortsetzung dieser Argumentation führt zu

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} P_n(S_0, K, T, r, \sigma) = \left(e^{-rt_1} K - S_0 \right)^+ \quad (3.11)$$

und zu $S_0^* = K$ für $\sigma \rightarrow 0$.

- iv) Für den Fall $\sigma \rightarrow \infty$ ergibt sich nach Formel (1.25) für den Preis einer $(n-i)$ -Bermuda-Put-Option

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} P_{n-i}(S, K, T_i, r, \sigma) = e^{-r\Delta_n} K$$

und hiermit die Behauptung. □

Lemma 3.11. Für die untere Schranke des kritischen Randes einer n -Bermuda Put-Option gilt

$$\frac{K}{1 + \frac{\sigma^2}{2r}} \leq S_{0,(n)}^* \leq S_{1,(n)}^* \leq \dots \leq S_{n,(n)}^* = K. \quad (3.12)$$

3.3 Weitere Eigenschaften des kritischen Randes

Beweis. Es gilt $S_{0,(n)}^* \geq S_0^*$, wobei S_0^* der kritische Preis (zur Zeit t_0) einer amerikanischen Put-Option mit der Laufzeit T ist. Die Behauptung folgt unmittelbar aus der Tatsache, dass $K/(1 + \frac{\sigma^2}{2r})$ der kritische Preis der sogenannten ewigen amerikanischen Put-Option¹ ist (vgl. [96]) und aus der Relation $P^A(T) \leq P^A(\infty)$. □

Zu den weiteren Eigenschaften des kritischen Randes einer n -Bermuda-Put-Option zählt auch die Invarianz bezüglich der Transformation der Variablen $(\tau, r, \sigma) \rightarrow (\lambda\tau, r/\lambda, \sigma/\sqrt{\lambda})$, wobei τ die Restlaufzeit bezeichnet. Diese Eigenschaft wurde bereits im Beweis von Lemma 2.28 bewiesen. Aus Vollständigkeitsgründen sei dieses Resultat hier noch einmal erwähnt.

Lemma 3.12. *Der kritische Rand einer n -Bermuda-Put-Option ist invariant unter der Transformation $(T_i, r, \sigma) \rightarrow (\lambda T_i, r/\lambda, \sigma/\sqrt{\lambda})$, genauer:*

Sei \mathcal{Z}_n eine Zerlegung des Intervalls $[0, T]$ und $\mathcal{Z}_{\lambda n} := \{\lambda t \mid t \in \mathcal{Z}_n\}$ eine Zerlegung des Intervalls $[0, \lambda T]$. Dann gilt

$$S_{i,(n)}^*(T_i, r, \sigma) = S_{i,(\lambda n)}^*(\lambda T_i, r/\lambda, \sigma/\sqrt{\lambda}), \quad (3.13)$$

wobei $S_{i,(n)}^*$ (bzw. $S_{i,(\lambda n)}^*$) den kritischen Preis zur Zeit t_i (bzw. λt_i) zur Zerlegung \mathcal{Z}_n (bzw. $\mathcal{Z}_{\lambda n}$) bezeichnet.

Folgerung 3.13. Durch den Grenzübergang auf beiden Seiten von Gleichung (3.13) kann das Ergebnis des letzten Lemmas auf den kritischen Rand einer amerikanischen Put-Option übertragen werden. Aus Lemma 3.12 folgt somit

$$S^*(K, \tau, r, \sigma) = S^*\left(K, \lambda\tau, r/\lambda, \sigma/\sqrt{\lambda}\right). \quad (3.14)$$

Dabei bezeichnet $S^*(K, \tau, r, \sigma)$ den kritischen Rand (zur Zeit t) einer amerikanischen Put-Option zu den Parametern: Ausübungspreis K , Restlaufzeit $\tau = T - t$, Zinssatz r und Volatilität σ . Gemeinsam mit der Linearität des kritischen Randes in dem Ausübungspreis K folgt daher

$$S^*(K, \tau, r, \sigma) = KS^*(1, \tau, r, \sigma) = KS^*(1, 1, r\tau, \sigma\sqrt{\tau}). \quad (3.15)$$

Bemerkung 3.14. Nach (3.15) kann der kritische Rand einer amerikanischen Put-Option nur noch als Funktion von zwei (anstatt vier) Parametern betrachtet werden. Dies ist eine weitere wichtige Erkenntnis bei der Suche nach einer analytischen Darstellung der unbekannten Funktion S^* . Außerdem kann mit Relation (3.14) die Güte von analytischen Approximationen des kritischen Randes überprüft werden, denn eine gute analytische Approximation soll alle bekannten Eigenschaften des kritischen Randes wiedergeben können.

¹Eine ewige amerikanische Put-Option ist ein rein theoretisches Konstrukt.

4. Numerische Studie

In diesem Kapitel wollen wir auf die numerische Berechnung der Preise amerikanischer Put-Optionen mit Hilfe von n -Bermuda-Put-Optionen im Black-Scholes-Modell eingehen. Die daraus resultierenden Ergebnisse werden mit den Ergebnissen aus einem Referenzmodell verglichen. Als Referenzmodell wird in dieser Arbeit das Binomialmodell dienen. Im ersten Teil des Kapitels wird daher das Binomialmodell beschrieben und die Bewertung von amerikanischen Put-Optionen in diesem Modell kurz skizziert. Darüber hinaus kann im Binomialmodell, ähnlich zum stetigen Fall, der kritische Rand definiert und bestimmt werden. Die Berücksichtigung des kritischen Randes bei der Berechnung der Preise amerikanischer Put-Optionen im Binomialmodell führt zu einem viel effizienteren Algorithmus (Boundary-Algorithmus 4.12) im Vergleich zum klassischen Cox-Ross-Rubinstein-Algorithmus (CRR-Algorithmus). Der zweite Teil wird sich mit der numerischen Berechnung des Preises einer n -Bermuda-Put-Option im Black-Scholes-Modell beschäftigen. Dabei wird zunächst untersucht, wie gut sich eine direkte Berechnung, mittels der analytischen Geske-Johnson-Formel (1.10) eignet, um den Preis einer amerikanischen Put-Option approximativ zu bestimmen. Anschließend werden weitere approximative Methoden, basierend auf der Early-Exercise-Prämie-Darstellung einer n -Bermuda-Put-Option aus Kapitel 1 entwickelt. Ein Algorithmusvergleich auf dem Parametersample aus der Originalarbeit von Geske und Johnson [41] rundet dieses Kapitel ab.

4.1. Das Binomialmodell

Das Binomialmodell ist ein zeitdiskretes Finanzmarktmodell, das im Jahre 1979 in der Originalarbeit von Cox, Ross und Rubinstein [25] beschrieben wurde. Aufgrund seiner einfachen und überschaubaren Struktur hat es sich sowohl in der Finanzwelt beliebt gemacht als auch in der Finanzliteratur fest etabliert. Einige wichtige Aspekte der Optionspreistheorie, wie etwa die Duplikationsstrategie oder die No-Arbitrage, lassen sich mit Hilfe des Binomialmodells auf einfache Weise veranschaulichen.

4.1.1. Bewertung im Binomialmodell

Es lässt sich eine Fülle an Literatur mit einer ausführlichen Beschreibung des Binomialmodells selbst und der Bewertung derivativer Instrumente in diesem finden (siehe beispielsweise [25], [52], [74] oder [112]). Im Folgenden wird daher das Modell nur kurz skizziert und in unserer Notation wiedergegeben.

Wir betrachten ein N -periodiges Binomialmodell, in dem es, wie auch im Black-Scholes-Modell, zwei Anlagearten gibt, eine risikolose und eine riskante Anlageart. Die risikolose Anlageart entwickelt sich mit dem Zins r . Die riskante, wie der Name „Binomial“ suggeriert, hat in jeder Zeitperiode nur zwei mögliche Entwicklungen: „up“ und „down“, d.h. die riskante Anlage und hier speziell die Aktie S_n entwickelt sich in einer Periode mit der Wahrscheinlichkeit \hat{p} zu $S_{n+1} = uS_n$ oder mit der Wahrscheinlichkeit $1 - \hat{p}$ zu $S_{n+1} = dS_n$ (üblicherweise $u > 1$, $\hat{p} > 0$ und $0 < d < 1$). In der darauffolgenden Periode sind für S_{n+2} die möglichen Kursstände u^2S_n, udS_n, duS_n oder d^2S_n .

Die Wahrscheinlichkeit für Aufwärts- bzw. Abwärtsbewegung in jeder Periode ist \hat{p} bzw. $1 - \hat{p}$. Wir wählen $d = 1/u$ und entscheiden uns somit für einen so genannten rekombinierenden Binomialbaum, in welchem $S_n = udS_n = duS_n$ gilt. Insgesamt, ausgehend vom Zeitpunkt 0 und dem bekannten Aktienkurs S_0 ergibt sich für einen N -periodigen Baum $(S_{n,i})_{i,n=0,\dots,N}$

$$S_{n,i} = u^i d^{n-i} S_0, \quad 0 \leq n \leq N, \quad 0 \leq i \leq n. \quad (4.1)$$

Den Preis einer amerikanischen Put-Option zur Zeit t_n , zum Aktienpreis $S_{n,i}$ und zum Ausübungspreis K bezeichnen wir als $V_{n,i}$. Die Auszahlung der Option am Ende der Laufzeit $t_N = T$ berechnet sich aus

$$V_{N,i} = \max \{K - S_{N,i}, 0\}, \quad i = 0, 1, \dots, N. \quad (4.2)$$

Mit Hilfe der Rückwärtsinduktion lässt sich der Preis nun auch zu früheren Zeitpunkten bestimmen, bis wir schließlich t_0 erreichen. Es gilt¹

$$V_{n,i} = \max \{K - S_{n,i}, e^{-r\Delta t_{n+1}} (p V_{n+1,i+1} + (1-p) V_{n+1,i})\} \quad (4.3)$$

und

$$V_0 = \max \{K - S_0, e^{-r\Delta t_1} (p V_{11} + (1-p) V_{10})\}, \quad (4.4)$$

mit $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$.

Die Formeln (4.1)–(4.4) beschreiben vollständig die klassische Vorgehensweise bei der Bewertung einer amerikanischen Put-Option in einem Binomialmodell. Beginnend mit (4.1) wird der Baum zunächst initialisiert, danach werden in (4.2) die Optionswerte zum Laufzeitende ermittelt, woraus dann im letzten Schritt rekursiv mit den Formeln (4.3)–(4.4) der aktuelle Preis V_0 berechnet wird.

Der auf diese Weise ermittelte Preis hängt, wie aus den Formeln ersichtlich, von den Modellparametern u, d, r und N ab. Um einen Vergleich der Optionspreise aus dem Bi-

¹Die Wahrscheinlichkeit p bezeichnet in Formeln (4.3)–(4.4) die sogenannte risikoneutrale Übergangswahrscheinlichkeit.

nomialmodell mit den Preisen aus dem Black-Scholes-Modell zu ermöglichen, sollten die Parameter u, d und N so festgelegt werden, dass der Binomialprozess

$$S_{k\Delta_N} = S_0 \prod_{i=1}^k R_i \quad \text{mit} \quad R_i = \begin{cases} u & \text{mit W'keit } p \\ d & \text{mit W'keit } 1-p \end{cases}$$

den stetigen risikoneutralen Prozess

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t$$

„möglichst gut“ approximiert [13].

Die erste Forderung ist somit, dass die ersten beiden Momente für den diskreten und den stetigen Prozess übereinstimmen. Dazu setzen wir $\Delta t = T/N$ und berechnen aus

$$\mathbb{E}[S_{t+\Delta t}^{BS}] = S_t e^{r\Delta t} \stackrel{!}{=} S_t (pu + (1-p)d) = \mathbb{E}[S_{t+\Delta t}^{BM}], \quad (4.5)$$

die Wahrscheinlichkeit p . Es gilt

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}.$$

Formel (4.5) entspricht der Martingal-Gleichung (No-Arbitrage-Gleichung) für das Binomialmodell. Somit ist die ermittelte Größe p eine risikoneutrale Wahrscheinlichkeit, solange

$$d < e^{r\Delta t} < u \quad (4.6)$$

gilt. Relation (4.6) ist die No-Arbitrage-Bedingung für das oben beschriebene Binomialmodell.

Mit Hilfe von (4.5) ergibt sich für die Varianzen

$$\begin{aligned} \text{Var}[S_{t+\Delta t}^{BS}] &= S_t^2 e^{2r\Delta t} (e^{\sigma^2 \Delta t} - 1) \\ \text{Var}[S_{t+\Delta t}^{BM}] &= S_t^2 (pu^2 + (1-p)d^2) - S_t^2 e^{2r\Delta t}. \end{aligned}$$

Aus $\text{Var}[S_{t+\Delta t}^{BS}] \stackrel{!}{=} \text{Var}[S_{t+\Delta t}^{BM}]$ folgt somit

$$e^{2r\Delta t + \sigma^2 \Delta t} = pu^2 + (1-p)d^2. \quad (4.7)$$

Das Einsetzen von $p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}$ und $d = 1/u$ in (4.7) liefert

$$u = \frac{1 + e^{2r\Delta t + \sigma^2 \Delta t} + \sqrt{(1 + e^{2r\Delta t + \sigma^2 \Delta t})^2 - 4e^{2r\Delta t}}}{2e^{r\Delta t}}. \quad (4.8)$$

Mittels der Taylor-Entwicklung der Exponentialfunktion nach Δt kann der Ausdruck für u approximativ für große N durch $e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$ ersetzt werden. Insgesamt bekommen wir für die Parameter u, d und p ¹

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad \text{und} \quad p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}. \quad (4.9)$$

Diese Parameterwahl ist in der Literatur als CRR-Parameter bekannt und wurde von den Autoren Cox, Ross und Rubinstein [25] vorgeschlagen. Es ist keineswegs eine endgültige und auch keine eindeutige Wahl der Parameter. Wenn wir zum Beispiel $p = 1/2$ setzen, erhalten wir nach der gleichen Kalkulation wie oben für u und d die sogenannte Jarrow-Rudd-Parametrisierung [59]

$$u = e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad d = e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad p = \frac{1}{2}.$$

In dieser Arbeit entscheiden wir uns für die CRR-Parametrisierung und verwenden die Formeln (4.1)–(4.4) bei der Berechnung der Preise von amerikanischen Put-Optionen. Quellcodes für die Implementierung im MATLAB können dem Anhang entnommen werden.

In Abbildung 4.1 sind die Preise amerikanischer Put-Optionen im Binomialmodell für unterschiedliche N , beginnend bei $N = 10000$, dargestellt.

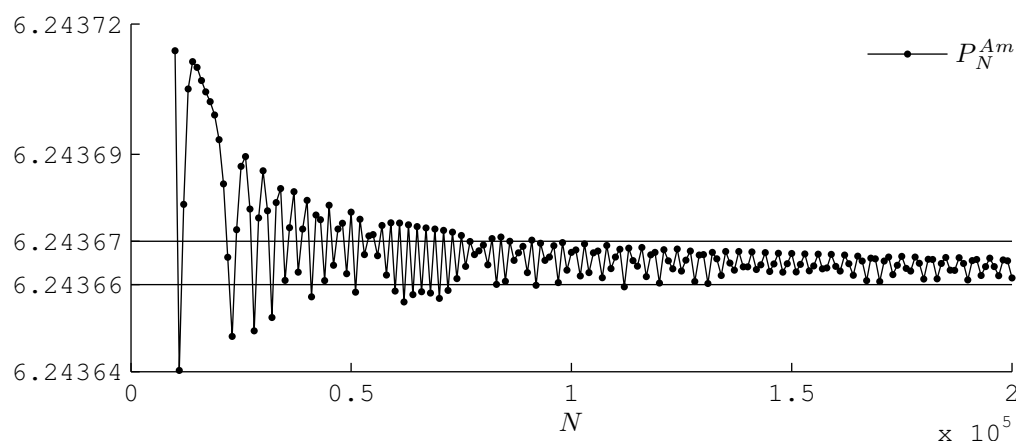


ABBILDUNG 4.1.: KONVERGENZ EINER AMERIKANISCHEN PUT-OPTION IM BINOMIALMODELL. PARAMETER $S_0=40$, $K=45$, $r=0.0488$, $\sigma=0.3$, $T=7/12$. VON 1×10^4 BIS 2×10^5 WURDE JEDER 10^3 -WERT AUFGETRAGEN.

¹Für diese Wahl der Parameter ist die linke Ungleichung in (4.6) automatisch erfüllt. Die rechte Ungleichung hängt hingegen von den Parametern r, σ, T und N ab. Für alle $N > r^2 T / \sigma^2$ ist sie jedoch immer erfüllt.

Bemerkung 4.1. Der Grenzwert der Folge in Abbildung 4.1 ist der Preis einer amerikanischen Put-Option im Black-Scholes-Modell. Die Untersuchung auf die Konvergenzgeschwindigkeit wurde unter anderen von Lamberton [77] und Leisen [80] durchgeführt. Lamberton fand für alle $N \in \mathbb{N}$ die folgende Relation

$$-\frac{c}{N^{2/3}} \leq P_N^{BM} - P^{BS} \leq \frac{C}{N^{4/5}}, \quad (4.10)$$

mit den Konstanten c , C und verwies auf numerischen Studien, welche auf die Konvergenz der Ordnung $1/N$ hindeuteten. Leisen [80] hat dies in Theorem 3.4. seiner Arbeit analytisch belegt.

Die Konvergenzordnung der Preise ist somit C/N , mit einer unbekannten Konstante C . Das ist insofern unzureichend, da die Konstante ziemlich groß sein kann, so dass die Preise selbst für große N , z.B. $N = 10000$ nicht genau genug sind (vgl. [64], [98]).

Bemerkung 4.2. Der größte Nachteil des Binomialmodells ist die oszillierende Konvergenz der Preise (abgesehen von einigen Spezialfällen), was Abbildung 4.1 entnommen werden kann. Dessen ungeachtet wird in der Literatur oft der Preis bei $N = 15000$ als „wahrer“ Preis betrachtet (vgl. [17]). In unserem Beispiel ist die Abweichung vom „wahren“ Preis, der wahrscheinlich zwischen 6.24366 und 6.24367 liegt, bei $N = 15000$ größer als zum Beispiel bei $N = 12000$.

4.1.2. Kritischer Rand im Binomialmodell

Eine besondere Eigenschaft amerikanischer Put-Optionen besteht in der vorzeitigen Ausübung. Wie aus Formel (4.3) ersichtlich, wird die Option genau dann ausgeübt, wenn ihr innerer Wert größer oder gleich ihrem Fortsetzungswert¹ ist. Wie wir später sehen werden, kann die Entscheidung über die Ausübung der Option zur Zeit t_n in Abhängigkeit vom Aktienkurs S_n getroffen werden. Mit anderen Worten, die Option wird genau dann ausgeübt, wenn der Aktienkurs S_n einen bestimmten Wert S_n^* übertrifft. Diesen Wert S_n^* , falls ein solcher existiert, nennen wir (ähnlich zum stetigen Fall) kritischer Preis zur Zeit t_n . Die Folge $(S_n^*)_{n=0, \dots, N}$ wird kritischer Rand bzw. kritische Grenze genannt.

In diesem Abschnitt wollen wir den kritischen Rand in einem Binomialmodell definieren und die Eigenschaften des Randes studieren. Wie bereits oben angemerkt wurde, führt die Berücksichtigung des Randes bei der Berechnung der Preise amerikanischer Put-Optionen im Binomialmodell zu einem effizienten Algorithmus (siehe unten Boundary-Algorithmus 4.12), der im Vergleich zum klassischen Algorithmus (beschrieben in (4.2)–(4.4)) mit weniger Rechenaufwand auskommt.

¹Der Wert der Option ohne einer sofortigen Ausübung.

Wir starten unsere Überlegungen mit dem letzten Zeitpunkt t_N . Dies ist gleichzeitig der letzte Ausübungszeitpunkt. Die amerikanische Put-Option wird genau dann zur Zeit t_N ausgeübt, wenn $K - S_N \geq 0$ ist. Insofern ist es naheliegend den kritischen Preis zur Zeit t_N als

$$S_N^* := \max \{S_{N,i} \mid K - S_{N,i} \geq 0, \quad i = 0, 1, \dots, N\} \quad (4.11)$$

zu definieren.

Nach der Definition von $S_{N,i}$ gilt $S_{N,i} = u^i d^{N-i} S_0$. Somit lässt sich $S_{N,i}$ vollständig durch i , d.h. durch die Anzahl der Aufwärtsbewegungen (auch „ups“ genannt) beschreiben. Wir definieren daher den kritischen Index i_N als denjenigen Index i zur Zeit t_N im Binomialbaum $(S_{n,i})$, für welchen das Maximum in (4.11) erreicht wird. Demzufolge gilt

$$i_N := \max \{i \mid K - u^i d^{N-i} S_0 \geq 0, \quad i = 0, 1, \dots, N\}. \quad (4.12)$$

Der kritische Preis S_N^* wird also durch den kritischen Index i_N eindeutig als $S_N^* := S_{N,i_N}$ definiert. Aus (4.12) und $u = 1/d$ folgt für i_N

$$i_N = \max \left\{ i \mid i \leq \frac{\log \left(\frac{K u^N}{S_0} \right)}{2 \log(u)}, \quad i = 0, 1, \dots, N \right\} \quad (4.13)$$

bzw.

$$i_N = \left\lfloor \frac{\log \left(\frac{K u^N}{S_0} \right)}{2 \log(u)} \right\rfloor \wedge N, \quad (4.14)$$

wobei $\lfloor \cdot \rfloor$ für die untere Gaußklammer steht, d.h. $n = \lfloor r \rfloor$ ist die größte natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n \leq r$, $r \in \mathbb{R}$. Das Symbol \wedge bedeutet hier $x \wedge y := \min\{x, y\}$.

Die Menge in (4.13) ist für kleine K , speziell für $K < d^N S_0$, leer. In diesem Fall ist der kritische Index und somit auch der kritische Preis nicht definiert. Es liegt daran, dass unser Binomialbaum $(S_{n,i})$ nicht groß genug ist. Was groß genug bedeutet, werden wir später erklären. Bis dahin nehmen wir an, dass in einem Binomialbaum $(S_{n,i}^{(N)})$, $0 \leq n \leq N$, $0 \leq i \leq n$ stets $K \geq d^N S_0$ gilt.

Den kritischen Index zu einem früheren Zeitpunkt t_n , $n < N$ definieren wir als

$$i_n := \max \{i \mid K - u^i d^{n-i} S_0 \geq V_{n,i}, \quad i = 0, 1, \dots, n\}, \quad (4.15)$$

mit $V_{n,i}$ aus (4.3). Der kritische Preis zur Zeit t_n wird dabei, in Analogie zur obigen Überlegung, als $S_n^* := S_{n,i_n}$ definiert.

Der kritische Index i_n , sofern existent, teilt einen Binomialbaum zur Zeit t_n in zwei Bereiche. Den Bereich, in welchem es optimal ist die Option zu halten, bezeichnen wir mit

$$\mathcal{C}_n := \{(n, i) \mid i > i_n\} \quad (4.16)$$

und nennen ihn, wie es in der Literatur üblich ist, *continuation region* zur Zeit t_n .

Im anderen Bereich hingegen ist eine sofortige Ausübung vorteilhaft. Wir bezeichnen ihn mit

$$\mathcal{S}_n := \{(n, i) \mid i \leq i_n\} \quad (4.17)$$

und nennen ihn *stopping region* zur Zeit t_n .

Für die Gesamtlaufzeit der amerikanischen Put-Option V_0 wird *stopping region* bzw. *continuation region* als

$$\mathcal{S} := \{\mathcal{S}_n, n = 0, 1, \dots, N\} \quad (4.18)$$

bzw.

$$\mathcal{C} := \{\mathcal{C}_n, n = 0, 1, \dots, N\} \quad (4.19)$$

definiert.

Bemerkung 4.3. Eine optimale Strategie für die amerikanische Put-Option wäre es somit diese zu halten, falls sie sich in continuation region \mathcal{C} befindet und sie auszuüben, falls sie in stopping region \mathcal{S} ist. Die Folge von kritischen Indizes $(i_n)_{n=0, \dots, N}$ „trennt“ beide Regionen voneinander.

Wie oben bereits angemerkt wurde, kann der Aktienstand $S_{n,i}$ zur Zeit t_n eindeutig durch die Angabe des Knotens (n, i) , aufgrund der Definition $S_{n,i} := u^i d^{n-i} S_0$, vollständig beschrieben werden. D.h. zwischen den Mengen $\hat{\mathcal{C}}_n = \{S_{n,i} \mid V_{n,i} > K - S_{n,i}, i = 0, \dots, n\}$ ¹ und \mathcal{C}_n bzw. zwischen $\hat{\mathcal{S}}_n = \{S_{n,i} \mid V_{n,i} \leq K - S_{n,i}, i = 0, \dots, n\}$ und \mathcal{S}_n besteht eine Eins-zu-eins-Beziehung. Obwohl die Mengen $\hat{\mathcal{C}}_n, \hat{\mathcal{S}}_n$ die Aktienkurse $S_{n,i}$ zur Zeit t_n enthalten und die Mengen $\mathcal{C}_n, \mathcal{S}_n$ die Knoten (n, i) des Binomialbaumes, sind sie ineinander überführbar. Aus diesem Grund wird in der vorliegenden Arbeit keine strikte Differenzierung zwischen beiden Mengentypen vorgenommen und im Folgenden $\hat{\mathcal{S}}_n, \mathcal{S}_n$ als *stopping region* zur Zeit t_n bzw. $\hat{\mathcal{C}}_n, \mathcal{C}_n$ als *continuation region* zur Zeit t_n bezeichnet. Welche Menge dabei gemeint ist, wird aus dem Kontext ersichtlich.

In Abbildung 4.2 sind die kritischen Ränder $(S_{n,(N)}^*)_{0 \leq n \leq N}$ für verschiedene Perioden N aufgetragen. Es lassen sich einige Regelmäßigkeiten im Verhalten des kritischen Randes erkennen.

¹Auf eine ähnliche Weise wird continuation region im Black-Scholes-Modell definiert.

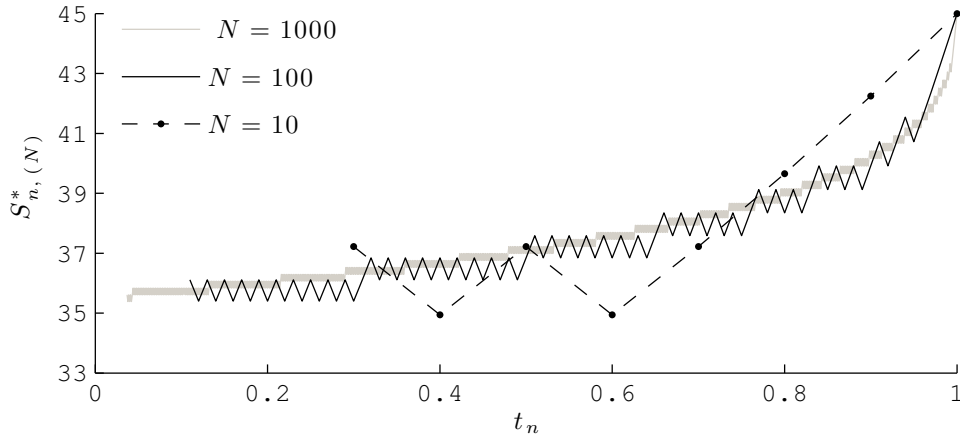


ABBILDUNG 4.2.: VERGLEICH VON KRITISCHEN RÄNDERN IM BINOMIALMODELL MIT UNTERSCHIEDLICHER ANZAHL AN PERIODEN N ($N = 10, 100$ UND 1000). DIE ÜBRIGEN PARAMETER SIND $S_0=45$, $K = 45$, $r = 0.04$, $\sigma = 0.2$, $T = 1$.

Zuerst sei auf den Verlauf des kritischen Randes hingewiesen. Im Verlaufsmuster sind für die unterschiedlich großen N verschieden große Sägezahnmuster erkennbar, die allesamt stufenartig ansteigen. Die Breite solch einer Stufe hängt offensichtlich von der Restlaufzeit ab. Je kürzer diese ist, desto schmaler wird eine Stufe. Innerhalb einer Stufe hat der kritische Rand einen im Sinne des Binomialbaumes konstanten Verlauf.

Weiterhin sei angemerkt, dass es vorkommen kann, dass der kritische Rand je nach Binomialbaum in den ersten Perioden gar nicht definiert ist, d.h. die Menge in (4.15) ist eine leere Menge. Das ist in Abbildung 4.2 bei allen drei Bäumen der Fall. In diesen Fällen hat der kritische Rand die untere Grenze des jeweiligen Baumes erreicht, d.h. $S_n^* \leq d^n S_0$ für ein $n \in \{0, 1, \dots, N\}$ und für alle $k \in \{0, \dots, n\}$ gilt $K - d^k S_0 < V_{k,0}$. Das bedeutet, dass der Fortsetzungswert der Option am unteren Rande des Baumes echt größer als der innere Wert ist.

Eine weitere Erkenntnis ist, dass der kritische Preis S_{n-1}^* zur Zeit t_{n-1} entweder gleich uS_n^* oder dS_n^* ist. Das ist die Stetigkeit des kritischen Randes $(S_n^*)_{0 \leq n \leq N}$ im Sinne des Binomialbaumes.

Unsere Beobachtungen führen zum folgenden Ergebnis.

Lemma 4.4. *Es sei optimal für ein $n \in \{1, \dots, N\}$ die amerikanische Put-Option auszuüben, d.h. $\exists i \in \{0, 1, \dots, n\}$ mit $V_{n,i} = K - S_{n,i}$. Ferner sei $i > 0$ ¹. Dann gilt*

$$V_{n-1,i-1} = K - S_{n-1,i-1} = K - u^{i-1} d^{n-i} S_0. \quad (4.20)$$

¹Damit ist sicher gestellt, dass der Knoten (n, i) nicht am unteren Rand des Baumes liegt.

Beweis. Aus $V_{n,i} = K - S_{n,i}$ folgt $V_{n,i-1} = K - S_{n,i-1}$ und daraus

$$\begin{aligned} e^{-r\Delta t} (pV_{n,i} + (1-p)V_{n,i-1}) &= e^{-r\Delta t} (p(K - S_{n,i}) + (1-p)(K - S_{n,i-1})) \\ &= e^{-r\Delta t} K - e^{-r\Delta t} (pS_{n,i} - (1-p)S_{n,i-1}) \\ &< K - S_{n-1,i-1}. \end{aligned}$$

Für den Preis $V_{n-1,i-1}$ folgt daher aus Definition (4.3)

$$V_{n-1,i-1} = \max \{ K - S_{n-1,i-1} ; e^{-r\Delta t} (pV_{n,i} + (1-p)V_{n,i-1}) \} = K - S_{n-1,i-1}.$$

□

Bemerkung 4.5. Das Ergebnis aus Lemma 4.4 war der bewegende Punkt für eine umfangreiche Literaturrecherche zu den Eigenschaften des kritischen Randes im Binomialmodell gewesen. Auch bei der Entwicklung eines neuen Algorithmus zur Berechnung der Preise von amerikanischen Put-Optionen spielt Lemma 4.4 eine zentrale Rolle.

Die Literaturrecherche hat erstaunlicherweise ergeben, dass die Definition und überhaupt das Gesamtkonzept des kritischen Randes im Binomialmodell sich nur in relativ wenigen Arbeiten finden lässt. Zu der Pionierarbeit aus unserer Sicht gehört die Arbeit von Kim und Byun [72]. Die Autoren haben eine tief gehende Analyse des kritischen Randes im Binomialmodell durchgeführt. Ebenso lässt sich dort eine ähnliche Aussage wie in Lemma 4.4 in einer abgeänderten Notation finden.

Lemma 4.6. Für ein $n \in \{2, \dots, N\}$ gäbe es ein Index $i \in \{1, \dots, n-1\}$, so dass im Knoten (n, i) gilt $V_{n,i} > K - S_{n,i}$, d.h. es ist nicht optimal die Option dort auszuüben, dann gilt (vgl. [72])

$$V_{n-2,i-1} > K - S_{n-2,i-1}. \quad (4.21)$$

Beweis. Zunächst sei erwähnt, dass in einem rekombinierenden Binomialbaum gilt

$$S_{n-2,i-1} = u^{i-1} d^{n-i-1} S_0 = u^i d^{n-i} S_0 = S_{n,i}.$$

Infolgedessen sind $V_{n-2,i-1}$ und $V_{n,i}$ zwei Optionen mit denselben Parametern bis auf die Restlaufzeit. Aus $t_{n-2} < t_n$ ergibt sich somit

$$V_{n-2,i-1} \geq V_{n,i} > K - S_{n,i} = K - S_{n-2,i-1}.$$

□

Folgerung 4.7. Falls es ein $n \in \{2, \dots, N\}$ und $i \in \{1, \dots, n-1\}$ gibt, so dass $V_{n,i} > K - S_{n,i}$ gilt, dann folgt

$$V_{n-1,i} > K - S_{n-1,i}. \quad (4.22)$$

Beweis. Der Beweis ist die direkte Folgerung aus beiden Lemmata 4.4 und 4.6. Denn aus der Ungleichung $V_{n,i} > K - S_{n,i}$ folgt nach Lemma 4.6 für den Preis im Baumknoten $(n-2, i-1)$ $V_{n-2,i-1} > K - S_{n-2,i-1}$. Des Weiteren steht $V_{n-1,i} \leq K - S_{n-1,i}$ im Widerspruch zu Lemma 4.4. Daher gilt die Umkehrung und somit die Behauptung. \square

Mit Lemmata 4.4, 4.6 und Folgerung 4.7 ist es möglich aus der Kenntnis über continuation region \mathcal{C}_n und stopping region \mathcal{S}_n zur Zeit t_n , die continuation region \mathcal{C}_{n-1} und stopping region \mathcal{S}_{n-1} (und als Folgerung die kritische Grenze) zur Zeit t_{n-1} bis auf einen Baumknoten genau zu bestimmen. Dieser Vorgang wird in Abbildung 4.3 anschaulich dargestellt.

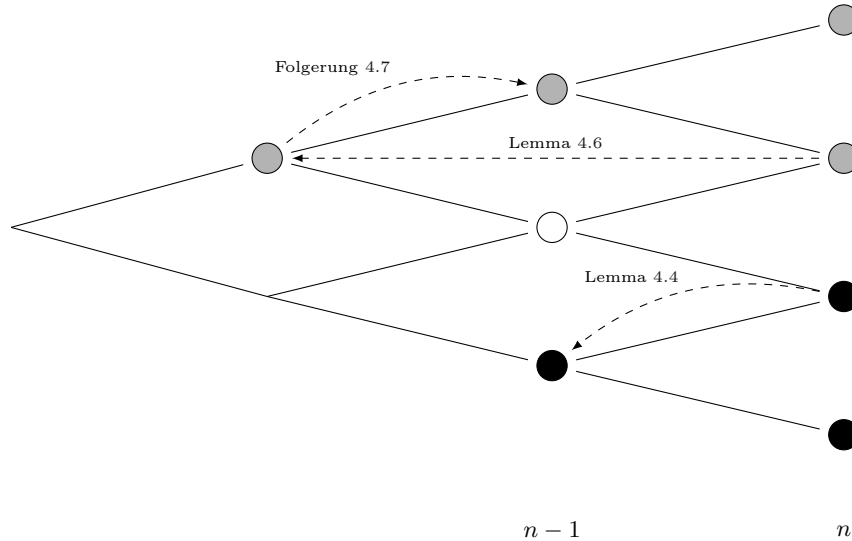


ABBILDUNG 4.3.: VORGEHENSWEISE BEI DER BESTIMMUNG DER REGIONEN \mathcal{S}_{n-1} , \mathcal{C}_{n-1} AUS \mathcal{S}_n UND \mathcal{C}_n .

Wie aus Abbildung 4.3 ersichtlich, gehören die Knoten mit den schwarzen Kreisen zur stopping region \mathcal{S} und die Knoten mit den grauen Kreisen zur continuation region \mathcal{C} . Beide Regionen \mathcal{C}_n und \mathcal{S}_n sind zur Zeit t_n bekannt. Nach einem Schritt zurück in der Zeit zum Zeitpunkt t_{n-1} bleibt lediglich zu überprüfen zu welcher Region der Knoten mit dem weißen Kreis gehört. Hierfür wird er induktiv (rückwärts!) aus seinen beiden Kindknoten zur Zeit t_n nach Formel (4.3) berechnet. Danach sind die Mengen \mathcal{S}_{n-1} und \mathcal{C}_{n-1} eindeutig festgelegt.

Der eben beschriebene Induktionsschritt stellt die Grundlage für einen neuen Algorithmus dar. Bevor wir mit der Beschreibung des Algorithmus fortfahren, wollen wir noch auf die Frage der Existenz und Eindeutigkeit des kritischen Randes eingehen.

Bemerkung 4.8. Wie aus Abbildung 4.2 hervorgeht, kann es vorkommen, dass der kritische Rand $(S_{n,(N)}^*)_{0 \leq n \leq N}$, in einem festen Binomialbaum $(S_{n,i}^{(N)})_{0 \leq n \leq N}$ mit den Parametern $u, d, \Delta t$ und S_0 nicht definiert ist für $0, 1, \dots, n_k$ mit $n_k \in \{0, 1, \dots, N\}$ ¹. Das ist genau dann der Fall, wenn der kritische Rand die untere Grenze des Baumes erreicht und den Baum komplett „verlässt“. Je nach Anwendung kann dies auf verschiedene Weise behoben werden.

Für die Preisbildung in einem Binomialbaum zum Beispiel, ist es irrelevant wo genau sich der kritische Rand zur Zeit t_k für alle $k \in \{0, \dots, n_k\}$ befindet. Wichtig ist die Tatsache, dass $S_k^* < d^k S_0$ für alle $0 \leq k \leq n_k$ gilt. Da jeder Aktienkurs $S_{n,i}$ im Binomialbaum mit CRR-Parametern nach der Definition strikt positiv ist, ist es zulässig $S_k^* \equiv 0$ für alle $k \in \{0, \dots, n_k\}$ zu setzen. Für den kritischen Index i_k bedeutet das äquivalent dazu $i_k \equiv -\infty$ für alle $k = \{0, \dots, n_k\}$.

Falls jedoch der kritische Rand aus dem Binomialmodell zur approximativen Berechnung des stetigen kritischen Randes herangezogen werden soll, so ist der obige Vorschlag unzureichend. Abhilfe verschaffen kann hier ein Baum, der weit in der Vergangenheit startet (vgl. [7]).

Der Ausgangsbaum $(S_{n,i}^{(N)})$ wird durch einen größeren Baum $(S_{n,i}^{(\hat{N})})$, d.h. $\hat{N} > N$, mit sonst identischen Parametern $u, d, \Delta t$ und S_0 ersetzt. Die Gleichheit der Parameter impliziert dabei, dass der Ursprungsbaum ein Unterbaum des neuen Baumes ist. Wir definieren daher

$$S_{n,(N)}^* := S_{\hat{N}-(N-n),(\hat{N})}^*, \quad n = 0, 1, \dots, N. \quad (4.23)$$

Es bleibt schließlich nur noch die Frage zu klären wie groß \hat{N} gewählt werden soll, damit $S_{\hat{N}-(N-n),(\hat{N})}^*$ für $n = 0$ und ebenso für alle $n = 1, \dots, N$ definiert ist. Das nächste Lemma beantwortet diese Frage.

Lemma 4.9. *Es sei ein Binomialbaum $(S_{n,i}^{(N)})$ mit den Parametern $u, d, \Delta t$ und S_0 gegeben. Weiterhin sei der kritische Index i_N wohldefiniert, d.h. $0 \leq i_N \leq N$. Definiere ein \hat{N} durch*

$$\hat{N} := 2(N - i_N) + N \quad (4.24)$$

und einen vergrößerten Binomialbaum $(S_{n,i}^{(\hat{N})})$ mit den Parametern $u, d, \Delta t$ und S_0 . Dann existiert in diesem vergrößerten Baum der kritische Rand $S_{\hat{N}-N,(\hat{N})}^$ zur Zeit $t_{\hat{N}-N}$.*

¹Die Existenz und die Eindeutigkeit des Randes (S_n^*) zu Zeiten t_{n_k+1}, \dots, t_N ist durch Lemmata 4.4, 4.6 und Folgerung 4.7 gewährleistet.

Beweis. Der kritische Preis S_N^* zum kritischen Index i_N ist

$$S_N^* = u^{i_N} d^{N-i_N} S_0 = d^{N-2i_N} S_0.$$

Da der vergrößerte Baum den ursprünglichen enthält, gilt in der Periode \hat{N} , $S_{\hat{N}}^* = S_N^*$. Weiterhin gilt nach Lemma 4.4

$$S_0 \leq d^N S_{\hat{N}}^* \in \hat{\mathcal{S}}_{\hat{N}-N}.$$

Nach der Definition des kritischen Randes in der Periode $\hat{N} - N$ gilt $d^N S_{\hat{N}}^* \leq S_{\hat{N}-N}^*$. Falls also $d^N S_{\hat{N}}^*$ ein Baumknoten des neuen Binomialbaumes $(S_{n,i}^{(\hat{N})})$ ist, so existiert in diesem Baum der kritische Preis $S_{\hat{N}-N}^*$. Für den kleinsten Baum, der zudem noch den Knoten $d^N S_{\hat{N}}^* = d^{2(N-i_N)} S_0$ enthält, muss also gelten

$$d^{\hat{N}-N} S_0 \stackrel{!}{=} d^{2(N-i_N)} S_0.$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Bemerkung 4.10. Lemma 4.9 garantiert also die Existenz (die Eindeutigkeit folgt dann aus der Definition) des kritischen Randes $(S_n^*)_{0 \leq n \leq N}$ für einen Baum, der $2(N - i_N)$ Perioden in der Vergangenheit zur Zeit $\hat{t}_0 = -t_{2(N-i_N)}$ startet. Der kritische Rand wird ausgehend von dem Endzeitpunkt t_N rückwärts bis zum Zeitpunkt t_0 berechnet. Der Rest des Baumes zu den Zeitpunkten $-t_{2(N-i_N)}, \dots, -t_1$ spielt bei der Berechnung des Randes keine Rolle und wird ignoriert.

Die nach Lemma 4.9 ermittelte Anzahl der Perioden \hat{N} eines Binomialbaumes ist nur eine hinreichende Größe, um die Existenz des kritischen Randes sicherzustellen. Der vergrößerte Binomialbaum $(S_{n,i}^{(\hat{N})})$ hat je nach Größe von i_N bis zu 3-mal so viele Perioden als der Ursprungsbaum $(S_{n,i}^{(N)})$. Viele praktische Beispiele belegen jedoch, dass die Existenz auch durch einen Binomialbaum mit einer deutlich kleineren Anzahl an Perioden gewährleistet werden kann. Das wird auch in der Arbeit von Basso, Nardon und Paolo [7] bestätigt. Die Autoren haben 25000-periodige Binomialbäume mit der Auslassung der ersten 5000 Schritte betrachtet. Nach Aussage der Autoren scheinen solche Modelle für viele Parametersätze robust zu sein. Allerdings ist nicht ganz einleuchtend wie viele Schritte ausgelassen werden sollen bei Bäumen mit einer kleineren oder größeren Anzahl an Perioden. Die 1/4 - Regel (abgeleitet aus 5000/20000) ist zum Beispiel für ein 100-periodiges Binomialmodell mit Auslassung der ersten 20 Perioden und den übrigen Parametern $S_0 = 45$, $K = 30$, $\sigma = 0.3$, $r = 0.03$ und $T = 1$ verletzt, d.h. der kritische Rand bleibt in diesem Fall für $n = 20$ nicht definiert. Die empirischen Beobachtungen liefern daher keineswegs ein hinreichendes Kriterium für die Existenz des kritischen Randes und ersetzen somit Lemma 4.9 nicht.

Wir schließen diesen Unterabschnitt mit einer letzten Feststellung ab, die bei der Implementierung des neuen Algorithmus gebraucht wird.

Feststellung 4.11. Wie bereits von Cox, Ross und Rubinstein [25] erwähnt wurde (vgl. auch [50]), ist der Wert einer europäischen Put-Option an bestimmten Knoten des Binomialbaumes von vornherein null. In Analogie dazu bezeichnen wir die Menge aller Knoten des Binomialbaumes, an welchen die amerikanische Put-Option den Wert null annimmt mit

$$\mathcal{N} := \{(n, i) \mid V_{n,i} = 0\} \quad (4.25)$$

und nennen sie *null region*.

Mit der Kenntnis von i_N und Formel (4.3) kann die Menge \mathcal{N} vollständig beschrieben werden. Es gilt

$$\mathcal{N} = \{(n, i) \mid i_N < i \leq n, i_N < n \leq N\}. \quad (4.26)$$

Da $V_{n,i} = 0$ für alle $(n, i) \in \mathcal{N}$ ist, werden diese Baumknoten bei der Berechnung des Preises einer amerikanischen Put-Option mit dem neuen Algorithmus nicht berücksichtigt.

4.1.3. Boundary-Algorithmus

Die Grundlage für den Boundary-Algorithmus zur Berechnung der Preise amerikanischer Put-Optionen in einem Binomialmodell stellen die Ergebnisse von Lemmata 4.4, 4.6 und Folgerung 4.7 dar.

Ebenso wie der klassische Algorithmus¹ startet auch der neue Algorithmus am Ende des Baumes und arbeitet sich rekursiv durch den ganzen Baum bis zum Anfang des Baumes vor. Ein wesentlicher Unterschied zum klassischen Algorithmus besteht darin, dass im Boundary-Algorithmus die Kenntnis über die stopping region \mathcal{S} und continuation region \mathcal{C} bzw. Äquivalent dazu die Kenntnis über den kritischen Rand (daher auch der Name Boundary-Algorithmus) bei der Berechnungen berücksichtigt und in jedem Schritt verwendet wird.

Zum Vergleich, im ersten Schritt zum Endzeitpunkt t_N berechnet der klassische Algorithmus $N + 1$ -mal den Preis $V_{N,i}$, $i = 0, 1, \dots, N$ nach der Formel

$$V_{N,i} = \max \{K - S_{N,i}, 0\}, \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

¹ Ein Algorithmus, der aus Formeln (4.2)–(4.4) entsteht und im Anhang als Algorithmus C.1 zu finden ist (vgl. auch [13]).

Beim Boundary-Algorithmus wird nur der kritische Index i_N nach der Formel

$$i_N = \left\lfloor \frac{\log\left(\frac{Ku^N}{S_0}\right)}{2\log(u)} \right\rfloor$$

berechnet und anschließend $V_{N,i_N} = K - S_{N,i_N}$ gesetzt. Es besteht keine Notwendigkeit $V_{N,i}$ für alle $i \neq i_N$ zu bestimmen, denn es gilt $V_{N,i} = 0$ für alle $i > i_N$ und $V_{N,i} = K - S_{N,i}$ für alle $i \leq i_N$.

Im nächsten Schritt zur Zeit t_{N-1} wird lediglich V_{N-1,i_N} aus V_{N,i_N} und $V_{N,i_N+1} = 0$ berechnet und die Zugehörigkeit des Knotens $(N-1, i_N)$ zur stopping region \mathcal{S}_{N-1} oder continuation region \mathcal{C}_{N-1} festgestellt, anstatt die Berechnungen in jedem der N Knoten durchzuführen, wie es beim klassischen Algorithmus der Fall ist.

Allgemein werden beim klassischen Algorithmus $n+1$ Rechenschritte zur Zeit t_n benötigt, wohingegen es beim Boundary-Algorithmus

$$\min\{n, i_N\} - \max\{0, i_{n+1} - 1\}, \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (4.27)$$

Schritte sind.

Wir fassen den gesamten Algorithmus zusammen.

Algorithmus 4.12 (Boundary-Algorithmus).

1) Berechne i_N nach der Formel

$$i_N = \left\lfloor \frac{\log\left(\frac{Ku^N}{S_0}\right)}{2\log(u)} \right\rfloor.$$

Falls

$$\begin{aligned} i_N &\geq N+1 && \text{setze } V_0 = K - S_0, \\ i_N &= 0 && \text{setze } V_0 = e^{-Nr\Delta t}(1-p)^N(K - d^N S_0), \\ i_N &< 0 && \text{setze } V_0 = 0, \end{aligned}$$

sonst gehe zum nächsten Schritt über.

II) Für ein $n \in \{1, \dots, N-1\}$ berechne $V_{n,i}$ für alle i aus der Menge

$$\{\max\{0, i_{n+1}\}, \dots, \min\{n, i_N\}\}$$

nach der Formel

$$V_{n,i} = e^{-r\Delta t}(pV_{n+1,i+1} + (1-p)V_{n+1,i}).$$

Falls

$$\begin{aligned} V_{n,i_{n+1}} &> K - S_{n,i_{n+1}} && \text{setze } i_n = i_{n+1} - 1, \\ V_{n,i_{n+1}} &\leq K - S_{n,i_{n+1}} && \text{setze } i_n = i_{n+1}, V_{n,i_{n+1}} = K - S_{n,i_{n+1}}. \end{aligned}$$

III) Berechne den Preis V_0 zur Zeit t_0 nach der Formel

$$V_0 = \max \{ K - S_0, e^{-r\Delta t} (pV_{1,1} + (1-p)V_{1,0}) \}.$$

Bemerkung 4.13. Der Boundary-Algorithmus ist keine Approximation, sondern eine optimierte Version des klassischen Algorithmus und daher auch mit den gängigen Konvergenz-Beschleunigungstechniken (wie z.B. *control variate methods*) kompatibel. Der Vorteil und die Effizienz des neuen Algorithmus besteht in der Verwendung deutlich weniger Rechenoperationen gegenüber dem klassischen Algorithmus. In Abbildung 4.4 ist die Arbeitsweise des neuen Algorithmus anschaulich dargestellt. Allein daraus lässt sich erkennen, dass der Boundary-Algorithmus mindestens 2-mal schneller ist, als der klassische Algorithmus.

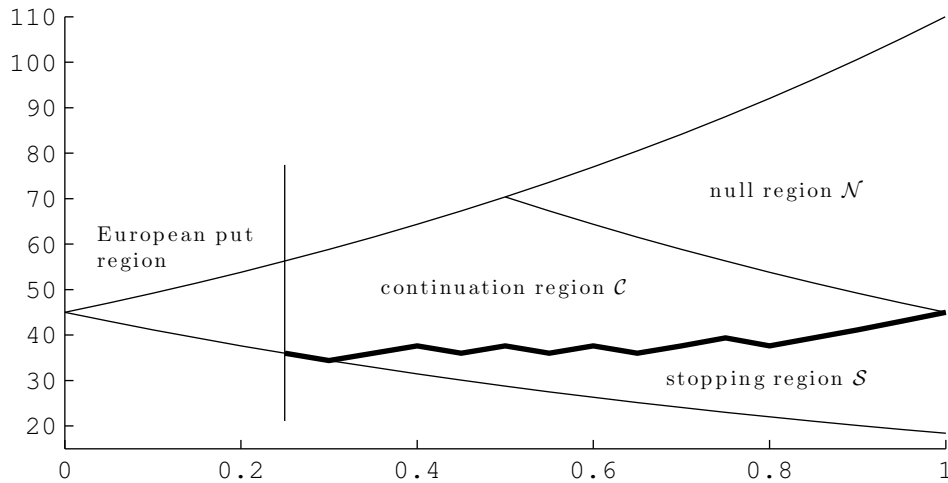


ABBILDUNG 4.4.: DIE FUNKTIONSWEISE DES BOUNDARY-ALGORITHMUS. PARAMETER: $S_0 = 45$, $K = 45$, $r = 0.04$, $\sigma = 0.2$, $T = 1$ UND $N = 20$.

Wie aus Abbildung 4.4 hervorgeht, wird der Binomialbaum in vier Gebiete unterteilt. Im Unterschied zum klassischen Algorithmus findet die Berechnung beim Boundary-Algorithmus nur in der continuation region \mathcal{C} statt. Diese Region ist mindestens 2-mal kleiner, im Sinne der Anzahl der Baumknoten, als der Gesamtbaum. In anderen Regionen ist der Preis der amerikanischen Put-Option bekannt und beträgt $V_{n,i} = 0$, falls $(n,i) \in \mathcal{N}$ oder $V_{n,i} = K - u^i d^{m-i} S_0$, falls $(n,i) \in \mathcal{S}$.

Sobald der kritische Rand das untere Ende des Binomialbaumes erreicht, z.B. zur Zeit t_{n_k} , wird die amerikanische Put-Option zu den früheren Perioden $n < n_k$ nicht mehr ausgeübt. Der Preis einer amerikanischen Put-Option zur Zeit t_0 kann somit, ähnlich wie im europäischen Fall, mit Hilfe der folgenden geschlossenen Formel berechnet werden (vgl. [25])

$$V_0 = \sum_{i=0}^{n_k} \binom{n_k}{i} e^{-rn_k \Delta t} p^i (1-p)^{n_k-i} V_{n_k,i}. \quad (4.28)$$

Allerdings ist die *European put region* marginal klein, vor allem für große N , im Vergleich zu der Größe des Baumes selbst. Zum Beispiel für $S_0 = 45$, $K = 45$, $r = 0.04$, $\sigma = 0.2$, $T = 1$ und $N = 10000$ beträgt die *European put region* knapp mehr als 1/100-Perioden des Gesamtbaumes. Aus diesem Grund wurde Formel (4.28) nicht im Boundary-Algorithmus berücksichtigt.

Aufgrund seiner Effizienz wurden alle Berechnungen im Binomialmodell mit dem neuen Boundary-Algorithmus durchgeführt. Der MATLAB-Quellcode kann dem Anhang entnommen werden.

4.2. n -Bermuda-Put-Option im Black-Scholes-Modell

In diesem Abschnitt wollen wir uns der Frage der numerischen Berechnung des Preises $P_n^{(n)}$ einer n -Bermuda-Put-Option im Black-Scholes-Modell widmen. Die analytische Preisformel für $P_n^{(n)}$ wurde im ersten Kapitel hergeleitet. Danach gilt

$$P_n^{(n)}(S, K, T) = K \sum_{k=1}^n e^{-rt_k} N_k(\mathbf{b}_{1k}; \mathbf{R}_{1k}) - S \sum_{k=1}^n N_k(\mathbf{a}_{1k}; \mathbf{R}_{1k}), \quad (4.29)$$

mit

$$\begin{aligned} b_i &:= \frac{\log \frac{S}{S_i^*} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) t_i}{\sigma \sqrt{t_i}} \quad \text{und} \quad a_i := b_i + \sigma \sqrt{t_i}, \\ \mathbf{b}_{1k} &:= (b_1, \dots, b_{k-1}, -b_k), \\ \mathbf{a}_{1k} &:= (a_1, \dots, a_{k-1}, -a_k), \\ \mathbf{R}_{1k} &:= \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{\frac{t_1}{t_2}} & \cdots & \sqrt{\frac{t_1}{t_{k-1}}} & -\sqrt{\frac{t_1}{t_k}} \\ \sqrt{\frac{t_1}{t_2}} & 1 & \cdots & \sqrt{\frac{t_2}{t_{k-1}}} & -\sqrt{\frac{t_2}{t_k}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \sqrt{\frac{t_{k-1}}{t_k}} & \sqrt{\frac{t_2}{t_{k-1}}} & \cdots & 1 & -\sqrt{\frac{t_{k-1}}{t_k}} \\ -\sqrt{\frac{t_1}{t_k}} & -\sqrt{\frac{t_2}{t_k}} & \cdots & -\sqrt{\frac{t_{k-1}}{t_k}} & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Zunächst werden wir versuchen den Preis einer n -Bermuda-Put-Option direkt aus (4.29) numerisch zu bestimmen. Für welche n eine direkte Berechnung realistisch durchführbar ist, wird die wesentliche Fragestellung im ersten Teil dieses Abschnittes sein. Der zweite Teil des Abschnittes wird eine approximative Berechnung des Preises einer amerikanischen Put-Option (bzw. einer n -Bermuda-Put-Option für große n) behandeln. Basierend auf der Early-Exercise-Prämie-Darstellung (1.87) werden zwei Algorithmen zur approximativen Berechnung des Preises einer amerikanischen Put-Option vorgeschlagen.

4.2.1. Direkte Berechnung

In diesem Abschnitt greifen wir auf die Mittel zurück, die bereits im zweiten Kapitel entwickelt wurden, speziell auf Satz 2.2 und Lemmata 2.5, 2.7 und 2.14.

Nach Lemma 2.14 gilt

$$P_n^{(n)}(S, K, T) = K \sum_{k=1}^n e^{-rt_k} N_k(\mathbf{b}_{1k}; \mathbf{R}_{1k}) - S \left(1 - N_n(\hat{\mathbf{a}}_{1n}; \hat{\mathbf{R}}_{1n}) \right) \quad (4.31)$$

mit $\hat{\mathbf{a}}_{1n} = \mathbf{D}_n \mathbf{a}_{1n}$, $\hat{\mathbf{R}}_{1n} = \mathbf{D}_n \mathbf{R}_{1n} \mathbf{D}_n$ und einer Diagonalmatrix $\mathbf{D}_n := \text{diag}(1, \dots, 1, -1)$. Somit wurde der zweite Summenausdruck in (4.29) durch eine n -dimensionale Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ersetzt. Leider kann die übriggebliebene Summe in (4.31) aufgrund des Diskontierungsfaktors e^{-rt_k} nicht auf eine ähnliche Weise vereinfacht werden. Es kann jedoch die Halbierung der Dimension aller in der Formel (4.31) auftretenden Normalverteilungsfunktionen erreicht werden. Nach Satz 2.2 gilt

$$N_k(\mathbf{b}_{1k}; \mathbf{R}_{1k}) = \int_{-\infty}^{b_i} n(x_i) N_{k-1}(\tilde{\mathbf{b}}_{1k \setminus \{i\}}; \tilde{\mathbf{R}}_{1k \setminus \{i\}}) dx_i. \quad (4.32)$$

Dabei gilt

$$n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$\tilde{\mathbf{b}}_{1k \setminus \{i\}} = \left(\underbrace{\frac{b_1 - \rho_{i1}x_i}{\sqrt{1 - \rho_{i1}^2}} \dots \overset{\text{ohne } i}{\downarrow} \dots}_{\tilde{\mathbf{b}}_{1i \setminus \{i\}}}, \underbrace{\frac{b_{k-1} - \rho_{i,k-1}x_i}{\sqrt{1 - \rho_{i,k-1}^2}}, \frac{-b_k - \rho_{ik}x_i}{\sqrt{1 - \rho_{ik}^2}}}_{\tilde{\mathbf{b}}_{ik \setminus \{i\}}} \right),$$

$$\mathbf{R}_{1k} = \{\rho_{st} \mid s, t = 1, \dots, k\}, \quad \rho_{st} = \delta_{sk} \delta_{kt} \sqrt{\frac{t_{\min\{s;t\}}}{t_{\max\{s;t\}}}},$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_{1k \setminus \{i\}} = \left\{ \frac{\rho_{st} - \rho_{is}\rho_{it}}{\sqrt{(1 - \rho_{is}^2)(1 - \rho_{it}^2)}} \mid s, t = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, k \right\}.$$

Weiterhin hat die Matrix $\tilde{\mathbf{R}}_{1k \setminus \{i\}}$ nach der Begründung im Beweis von Lemma 2.7 die folgende Struktur

$$\tilde{\mathbf{R}}_{1k \setminus \{i\}} := \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{R}}_{1i \setminus \{i\}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{R}}_{ik \setminus \{i\}} \end{pmatrix},$$

so dass nach Lemma 2.5 folgt

$$N_{k-1}(\tilde{\mathbf{b}}_{1k \setminus \{i\}}; \tilde{\mathbf{R}}_{1k \setminus \{i\}}) = N_{i-1}(\tilde{\mathbf{b}}_{1i \setminus \{i\}}; \tilde{\mathbf{R}}_{1i \setminus \{i\}}) N_{k-i}(\tilde{\mathbf{b}}_{ik \setminus \{i\}}; \tilde{\mathbf{R}}_{ik \setminus \{i\}}). \quad (4.33)$$

Insgesamt folgt für die k -dimensionale Verteilungsfunktion der Normalverteilung

$$N_k(\mathbf{b}_{1k}; \mathbf{R}_{1k}) = \int_{-\infty}^{b_i} n(x_i) N_{i-1}(\tilde{\mathbf{b}}_{1i \setminus \{i\}}; \tilde{\mathbf{R}}_{1i \setminus \{i\}}) N_{k-i}(\tilde{\mathbf{b}}_{ik \setminus \{i\}}; \tilde{\mathbf{R}}_{ik \setminus \{i\}}) dx_i. \quad (4.34)$$

Jede Normalverteilungsfunktion in Formel (4.29) kann aufgrund der symmetrischen Struktur der Korrelationsmatrix auf die Form (4.34) gebracht werden. Somit kann eine k -dimensionale Verteilungsfunktion der Normalverteilung ($k \geq 2$) als ein Integral über $(k-i)$ und $(i-1)$ -dimensionale Verteilungsfunktionen der Normalverteilung aufgefasst werden (vgl. [28]). Auf diese Weise wird eine Reduzierung der Dimension der zu berechnenden Integrale (multivariate Normalverteilungen) erreicht. Da die Zerlegung in (4.34) für jeden Index $i = 1, \dots, k$ gültig ist, kann letzterer frei gewählt werden. Die niedrigste Dimension, die die mehrdimensionalen Integrale auf der rechten Seite von Formel (4.34) einnehmen können, tritt im Falle $i-1 = k-i$ auf. Das bedeutet, dass für die Wahl des Index $i = \lfloor k + 1/2 \rfloor$ die Dimension der k -dimensionalen Normalverteilung nahezu halbiert wird (vgl. auch [103]).

Die Korrelationsmatrix $\tilde{\mathbf{R}}_{ik \setminus \{i\}}$ der $(k-i)$ -dimensionalen Normalverteilung in Formel (4.34) hat nach (2.17) die folgende Gestalt

$$\tilde{\mathbf{R}}_{ik \setminus \{i\}} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{\frac{t_{i+1}-t_i}{t_{i+2}-t_i}} & \cdots & \sqrt{\frac{t_{i+1}-t_i}{t_{k-1}-t_i}} & -\sqrt{\frac{t_{i+1}-t_i}{t_k-t_i}} \\ \sqrt{\frac{t_{i+1}-t_i}{t_{i+2}-t_i}} & 1 & \cdots & \sqrt{\frac{t_{i+2}-t_i}{t_{k-1}-t_i}} & -\sqrt{\frac{t_{i+2}-t_i}{t_k-t_i}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \sqrt{\frac{t_{i+1}-t_i}{t_{k-1}-t_i}} & \sqrt{\frac{t_{i+2}-t_i}{t_{k-1}-t_i}} & \cdots & 1 & -\sqrt{\frac{t_{k-1}-t_i}{t_k-t_i}} \\ -\sqrt{\frac{t_{i+1}-t_i}{t_k-t_i}} & -\sqrt{\frac{t_{i+2}-t_i}{t_k-t_i}} & \cdots & -\sqrt{\frac{t_{k-1}-t_i}{t_k-t_i}} & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Struktur dieser Matrix stimmt mit der Struktur der Korrelationsmatrix \mathbf{R}_{1k} überein (vergleiche dazu die Struktur der beiden Matrizen z.B. für $i = 0$). Somit kann Formel (4.34) wiederholt auf die multivariate Normalverteilung $N_{k-i}(\cdot; \tilde{\mathbf{R}}_{ik \setminus \{i\}})$ angewandt werden. Besondere Vorteile dieser Beobachtung (gleiche Struktur der Matrizen \mathbf{R}_{1k} und $\tilde{\mathbf{R}}_{ik \setminus \{i\}}$) eröffnen sich für kleine Indizes i . Insbesondere werden wir hier die Fälle $i = 1$ und $i = 2$ untersuchen. Die Begründung für diese Wahl ist die folgende: die Komposition $n(\cdot)N_{i-1}(\cdot)$ ist eine Funktion, die für $i = 1, 2$ (zur Erinnerung $N_0 = 1$) sowohl analytisch, als auch numerisch gut handhabbar ist.

Da der Fall $i = 1$ ein Spezialfall eines Algorithmus von Genz [37] ist, welchen wir weiter unten ausführlich beschreiben und für unsere Zwecke einsetzen werden, vertauschen wir die natürliche Reihenfolge und beginnen zunächst mit einer kurzen Erläuterung des Falls $i = 2$.

Fall $i = 2$:

Mit der Wahl des Index $i = 2$ wird nach der obigen Argumentation eine k -dimensionale Standardnormalverteilung in eine 1-dimensionale und eine $(k - 2)$ -dimensionale Standardnormalverteilung aufgespalten (vgl. [28]). Im nächsten Schritt wird die $(k - 2)$ -dimensionale Standardnormalverteilung wieder mit Hilfe von Formel (4.34) als ein Integral über eine 1-dimensionale und eine $(k - 4)$ -dimensionale Standardnormalverteilung geschrieben. Diese Prozedur wird insgesamt, ausgehend von einer k -dimensionalen Standardnormalverteilung, $\lfloor k + 1/2 \rfloor$ -mal wiederholt.

Beispiel 4.14 (Index $i = 2$). Es sei $\mathcal{Z}_6 = \{0, \frac{T}{6}, \frac{T}{3}, \frac{T}{2}, \frac{2T}{3}, \frac{5T}{6}, T\}$, dann ergibt sich, nach einer 3-fachen Anwendung von Formel (4.34) auf sich selbst, für eine 6-dimensionale Standardnormalverteilungsfunktion¹ mit einem Vektor $\mathbf{b}_{16} = (b_1, b_2, \dots, b_6)$ und einer Korrelationsmatrix $\mathbf{R}_{16} = \left\{ \sqrt{\frac{i \wedge j}{i \vee j}} \mid i, j = 1, 2, \dots, 6 \right\}$, wobei $i \wedge j$ ($i \vee j$) für $\min\{i, j\}$ ($\max\{i, j\}$) steht,

$$\begin{aligned} N_6(\mathbf{b}_{16}; \mathbf{R}_{16}) = & \int_{-\infty}^{b_2} n(x_1) N(\sqrt{2}b_1 - x_1) \times \\ & \int_{-\infty}^{\sqrt{\frac{4}{2}}b_4 - x_1} n(x_2) N(\sqrt{2}\sqrt{3}b_3 - 2x_1 - x_2) \times \\ & \int_{-\infty}^{\sqrt{\frac{6}{2}}b_6 - (x_1 + x_2)} n(x_3) N(\sqrt{2}\sqrt{5}b_5 - 2(x_1 + x_2) - x_3) dx_3 dx_2 dx_1. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Dabei steht $n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ für die Dichtefunktion der Standardnormalverteilung.

Das letzte Integral in (4.35) hat die Form

$$\int_{-\infty}^{a-y} n(x) N(b - 2y - x) dx. \quad (4.36)$$

Nach unserem Wissensstand gibt es keinen geschlossenen Ausdruck für das obige Integral in (4.36), so dass die Berechnung der 6-dimensionalen Normalverteilung in (4.35) nur mit Hilfe von numerischen Methoden zu bewältigen ist.

¹Eine allgemeine Rekursionsformel für $N_k(\mathbf{b}_{1k}; \mathbf{R}_{1k})$ findet sich im Anhang.

Fall $i = 1$:

Es seien ein Vektor $\mathbf{b}_{1k} = (b_1, b_2, \dots, b_k)$ und eine Korrelationsmatrix

$$\mathbf{R}_{1k} = \left\{ \sqrt{\frac{i \wedge j}{i \vee j}} \mid i, j = 1, 2, \dots, k \right\}$$

gegeben¹.

Für eine k -dimensionale Normalverteilungsfunktion der Standardnormalverteilung an der Stelle \mathbf{b}_{1k} und mit der Korrelationsmatrix \mathbf{R}_{1k} folgt nach einer k -fachen Anwendung von Formel (4.32) mit dem Index $i = 1$ auf sich selbst

$$\begin{aligned} N_k(\mathbf{b}_{1k}; \mathbf{R}_{1k}) &= \\ &= \int_{-\infty}^{b_1} n(x_1) \int_{-\infty}^{\sqrt{2}b_2 - x_1} n(x_2) \int_{-\infty}^{\sqrt{3}b_3 - x_1 - x_2} n(x_3) \cdots \int_{-\infty}^{\sqrt{k}b_k - \sum_{i=1}^{k-1} x_i} n(x_k) dx_k \dots dx_1. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Der Ausdruck in (4.37) kann mit den Methoden von Genz [37] weiter behandelt werden. Der von ihm vorgeschlagenen Algorithmus zur numerischen Berechnung von multivariaten Normalverteilungen ist einer der gängigsten Algorithmen sowohl in der Literatur als auch in der Praxis.

Algorithmus 4.15 (Algorithmus von Genz).

1) *Transformation:*

Für jedes x_i verwende die Substitution $x_i = N^{-1}(y_i)$. Das Integral aus Formel (4.37) transformiert sich dann zu

$$N_k(\mathbf{b}_{1k}; \mathbf{R}_{1k}) = \int_0^{N(b_1)} \int_0^{N(\sqrt{2}b_2 - N^{-1}(y_1))} \cdots \int_0^{N(\sqrt{k}b_k - \sum_{i=1}^{k-1} N^{-1}(y_i))} dy_k \dots dy_1. \quad (4.38)$$

Eine zweite Substitution $y_i = A_i z_i$, wobei $A_i = N\left(\sqrt{k}b_k - \sum_{i=1}^{k-1} N^{-1}(y_i)\right)$ die obere Integralgrenze des jeweiligen Integrals ist, führt zu

$$N_k(\mathbf{b}_{1k}; \mathbf{R}_{1k}) = B_1 \int_0^1 B_2 \cdots \int_0^1 B_k \int_0^1 dz_k \dots dz_1$$

¹Die Struktur der Korrelationsmatrix entspricht der Struktur der Korrelationsmatrizen in der Geske-Johnson-Formel (4.29) im Falle einer arithmetischen Zerlegung $\mathcal{Z}_k = \{0, T/k, \dots, (k-1)T/k, T\}$.

bzw.

$$N_k(\mathbf{b}_{1k}; \mathbf{R}_{1k}) = \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 B_1 B_2 \dots B_k dz_{k-1} \dots dz_1 \quad (4.39)$$

mit

$$B_1 := N(b_1) \quad (4.40)$$

und

$$B_k := N\left(\sqrt{k}b_k - \sum_{i=1}^{k-1} N^{-1}(z_i B_i)\right). \quad (4.41)$$

II) *Berechnung:*

Verwende (Quasi-)Monte-Carlo-Methoden, um das Integral in (4.39) zu berechnen.

Bemerkung 4.16. Der oben beschriebene Algorithmus von Genz ist ein Spezialfall seines Algorithmus in [37] angepasst an unsere Situation. Genz [37] hat allgemeine multivariate Normalverteilungen betrachtet

$$N_k(\mathbf{A}_k; \mathbf{\Sigma}_k) = \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{\Sigma}_k|} (2\pi)^k} \int_{\mathbf{A}_k} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{x}_k^t \mathbf{\Sigma}_k^{-1} \mathbf{x}_k} d\mathbf{x}_k. \quad (4.42)$$

Dabei sind $\mathbf{x}_k^t := (x_1, x_2, \dots, x_k)$, $\mathbf{\Sigma}_k^{-1}$ eine $k \times k$ symmetrische positiv definite Matrix und \mathbf{A}_k ein k -dimensionaler Hyperwürfel. Im allerersten Schritt wird das Integral in (4.42) mit Hilfe der Cholesky-Zerlegung der Kovarianzmatrix $\mathbf{\Sigma}_k = \mathbf{C}_k \mathbf{C}_k^t$ und der Substitution $\mathbf{x}_k = \mathbf{C}_k \mathbf{y}_k$ auf eine ähnliche Form wie unser Integral in Formel (4.37) gebracht. Danach wird wie in Algorithmus 4.15 fortgeschritten. Dieser erster Schritt und somit auch der Aufwand von $\mathcal{O}(n^3)$ bleibt uns allerdings erspart (siehe Herleitung oben).

Bemerkung 4.17. Das Ausgangsintegral $N_k(\mathbf{b}_{1k}; \mathbf{R}_{1k})$ wird somit mit den von Genz [37] vorgeschlagenen Transformationen auf ein $(k-1)$ -dimensionales Integral der Funktion

$$f(z_1, \dots, z_{k-1}) = \prod_{i=1}^k B_i, \quad (4.43)$$

mit B_i definiert in (4.41), über einen $(k-1)$ -dimensionalen Einheits-Hyperwürfel $[0, 1]^{k-1}$ zurückgeführt¹. Das letztere Integral kann mit einer der folgenden Methoden approxima-

¹Mit der Wahl des Index $i = 2$ (siehe Abschnitt „Fall $i = 2$ “) kann die Dimension des Integrationsgebietes $[0, 1]^{k-1}$ halbiert werden. Der Integrand f ist dann eine etwas „kompliziertere“ Funktion $f = \prod_{i=1}^{2k} B'_i$, die sich als Komposition von höchstens 1-dimensionalen Verteilungsfunktionen der Standardnormalverteilung darstellen lässt.

tiv berechnet werden: Monte-Carlo-Methode oder Quasi-Monte-Carlo-Methode.

Die Grundidee bei Monte-Carlo und Quasi-Monte-Carlo Methoden ist es das zu berechnende Integral als arithmetisches Mittel der Funktionswerte, ausgewertet an den Stützstellen $\mathbf{x}_{k,1}, \mathbf{x}_{k,2}, \dots, \mathbf{x}_{k,N} \in [0, 1]^k$, zu approximieren

$$\int_{[0,1]^k} f(\mathbf{x}_k) d\mathbf{x}_k \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\mathbf{x}_{k,i}). \quad (4.44)$$

Der Hauptunterschied zwischen den beiden Methoden liegt in der Natur der Stützstellen. Wenn es bei der Monte-Carlo-Methode $\mathbf{x}_{k,i}$, $i = 1, 2, \dots, N$ unabhängige auf $[0, 1]^k$ gleichverteilte (Pseudo-) Zufallszahlen sind, sind es bei Quasi-Monte-Carlo-Methode deterministische gleichverteilte Punkte aus $[0, 1]^k$ von niedriger Diskrepanz, z.B. die Halton-Folge (vgl. [42]). Eine weitere detaillierte Beschreibung dieser Methoden kann in Genz und Bretz [40] oder in Deák [32] gefunden werden.

Bemerkung 4.18. Andere in der Literatur beschriebene Verfahren zur Berechnung der multivariaten Normalverteilungen sind zum Beispiel der Algorithmus von Schervish [102], der Algorithmus von Miwa et al. [91] und der Algorithmus von Craig [27], der den Ansatz von Miwa et al. [91] weiter entwickelte.

Das Verfahren von Schervish [102] verfolgt die Idee der lokal adaptiven numerischen Integration basierend auf Quadraturformeln (Simpson-Regel, Trapezregel etc.). Eine besondere Eigenschaft seines Verfahrens ist, dass eine exakte (deterministische) Fehlerabschätzung angegeben werden kann. Andere Verfahren liefern meist nur die statistischen Schätzer für den Approximationsfehler (vgl. [36]).

Außerdem schlägt Schervish [102] vor, den Vektor der oberen Integrationsgrenze \mathbf{b}_{1k} (und daher auch die zugehörigen Zeilen und Spalten der Kovarianzmatrix) geeignet zu sortieren, was zu einer Reduzierung des Rechenaufwandes führen kann. Dieser Ansatz kann ebenso bei anderen Verfahren angewandt werden.

Die Algorithmen von Miwa et al. [91] und Craig [27] basieren auf der Idee, dass für jedes $X \sim \mathcal{N}_k(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ und für jede Zerlegung der Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{C}\mathbf{C}^t$ gilt $X = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{C}Z$ mit $Z \sim \mathcal{N}_k(\mathbf{0}, \mathbf{I})$. Daher ist¹

$$\mathbb{P}(X \geq 0) = \mathbb{P}(\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\mu} + Z \in \mathcal{Q}), \quad (4.45)$$

wobei $\mathcal{Q} := \{\mathbf{x} \mid \mathbf{C}\mathbf{x} \geq 0\}$ ein polyedrischer Kegel in \mathbb{R}^k ist. Weiterhin kann die Geometrie der Kegeln genutzt werden, um die Ausgangswahrscheinlichkeit in (4.45) als Komposition von multivariaten Normalverteilungen, welche wiederum numerisch einfacher zu handhaben sind, darzustellen (vgl. [27], [91]).

¹Bei Variation von $\boldsymbol{\mu}$ in (4.45) können k -dimensionale Normalverteilungen für jeden Punkt aus \mathbb{R}^k ausgewertet werden.

Ein direkter Vergleich dieser Methoden in Bezug auf ihre Effizienz (Schnelligkeit und Genauigkeit) kann in [38] und [90] gefunden werden. Zusammenfassend lässt sich sagen, dass für kleine Dimensionen ($k \leq 4$ für den Algorithmus von Schervish und $k \leq 7, 8$ für die Algorithmen von Miwa et al. bzw. Craig), die in dieser Bemerkung kurz erläuterten Algorithmen durchaus eine Alternative zum Algorithmus 4.15 (Algorithmus von Genz) darstellen oder diesen sogar in speziellen Fällen übertreffen (bezogen auf die Zeit oder die Genauigkeit). Für höhere Dimensionen gibt es hingegen keine echten Alternativen zum Algorithmus 4.15. Die Autoren in [90] behaupten sogar, dass das *quasi-randomized* Monte-Carlo-Verfahren von Genz und Bretz [39] für die Berechnung bis zu 1000-dimensionalen Normalverteilungen verwendet werden kann.

In dieser Arbeit entscheiden wir uns für den Algorithmus von Genz (Algorithmus 4.15). Dieser steht im Matlab als Funktion *mvncdf* zu Verfügung. Dabei wird bei dieser Funktion für Dimensionen ≤ 4 ein ähnlicher Algorithmus wie der von Schervish [102] verwendet und erst ab Dimensionen ≥ 5 der Algorithmus von Genz.

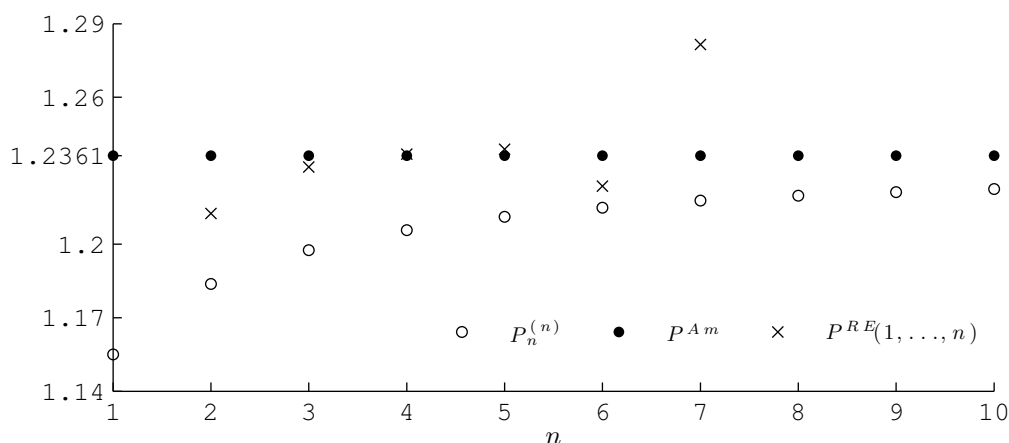


ABBILDUNG 4.5.: n -BERMUDA-PUT-OPTION $P_n^{(n)}$ vs. AMERIKANISCHE PUT-OPTION P^{Am} vs. RICHARDSON-EXTRAPOLATION $P^{RE}(1, \dots, n)$. PARAMETER $S_0=50$, $K=45$, $r=0.05$, $\sigma=0.2$, $T=1$, $\mathcal{Z}_n=\{0, T/n, 2T/n, \dots, T\}$, $n=1 \dots, 10$.

In Abbildung 4.5 haben wir die ersten Folgenglieder $P_n^{(n)}$ für $n=1, 2, \dots, 10$ im Vergleich zum Preis einer amerikanischen Put-Option (berechnet mit Boundary-Algorithmus mit $N=10^6$ Perioden) aufgetragen. Hiermit wird noch einmal, die im ersten Kapitel gezeigte Konvergenz der Preise grafisch bestätigt.

Trotz unserer Bemühungen den Rechenaufwand soweit wie möglich zu reduzieren, bleibt eine direkte Berechnung des Preises einer n -Bermuda-Put-Option nach der Geske-Johnson-Formel (4.29) ein rechenintensiver Prozess. Abgesehen davon, dass die numerische Berechnung der multivariaten Normalverteilungen ohnehin mit einem hohen Rechenauf-

wand verbunden ist, möchten wir zwei Hauptursachen für die immense Rechenintensität in unserem Fall hervorheben:

I) *Erste Summe in der Geske-Johnson-Formel (4.29)*

Im Gegensatz zum zweiten Summenausdruck, kann die erste Summe aufgrund des Diskontierungsfaktors e^{-rt_k} nicht vereinfacht werden.

II) *Berechnung des kritischen Randes*

Um den Preis einer *n*-Bermuda-Put-Option zu berechnen, wird zunächst der kritische Rand $(S_i^*)_{i=1,\dots,n-1}$ rekursiv aus der impliziten Gleichungen

$$P_i^{(n)}(S) - (K - S) = 0, \quad i = 1, \dots, n-1$$

ermittelt (z.B. mit der Newton-Raphson-Methode). Das impliziert eine mehrfache¹ Berechnung der Preise von 1- bis $(n-1)$ -Bermuda-Put-Optionen.

Eine direkte Berechnung des Preises einer *n*-Bermuda-Put-Option ist somit nicht für beliebig große *n* praktisch durchführbar. Allein die Berechnung des Preises einer 15-Bermuda-Put-Option dauert 30 bis 40-mal länger als die Berechnung einer amerikanischen Put-Option (mit den gleichen Parametern) in einem 10^5 -periodigen (!) Binomialmodell.

Aus diesem Grund haben Geske und Johnson [41] vorgeschlagen auf Extrapolationsmethoden zurückzugreifen. In Abbildung 4.5 wurden die Extrapolationswerte basierend auf den ersten Folgengliedern, ermittelt mit Hilfe der Richardson-Extrapolation², nach dem Vorschlag von Geske und Johnson [41], aufgetragen. Die Extrapolationsformeln $P^{RE}(1, 2, 3)$ für den Fall $n = 3$ und $P^{RE}(1, 2, 3, 4)$ für den Fall $n = 4$ sind in [41] zu finden (siehe auch Formeln (1.34) und (1.35)).

Ein geschlossener Ausdruck für den Richardson-Extrapolationswert $P^{RE}(1, 2, \dots, n)$, berechnet aus den ersten *n* Gliedern der Folge $P_n^{(n)}$ (*n*-Bermuda-Put-Option) bei der arithmetischen Zerlegungsfolge $\mathcal{Z}_n = \{0, T/n, 2T/n, \dots, T\}$ der Ausübungszeitpunkte, wurde von Prékopa und Szántai [97] hergeleitet. Danach gilt

$$P^{RE}(1, 2, \dots, n) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{n-k} k^{n-1}}{(k-1)!(n-k)!} P_k^{(k)}. \quad (4.46)$$

Die Idee, den Ansatz von Geske und Johnson weiterzuverfolgen und die Richardson-Extrapolation auf eine höhere Anzahl der ersten Folgenglieder $P_n^{(n)}$ anzuwenden, schei-

¹Üblicherweise werden 2 bis 5 Iterationen gebraucht, um mit einer $\epsilon = 0.0005$ Genauigkeit die Lösung der impliziten Gleichung $P_i^{(n)}(S) = K - S$ zu erhalten.

²Zur Richardson-Extrapolation sei auf das Buch von Dahlquist und Björck [30] und die dort befindlichen Referenzen verwiesen.

tert allerdings aus folgendem Grund. Die Gewichte in Formel (4.46) werden bereits für kleine Indizes n sehr groß. Zum Beispiel ist der Koeffizient bei $P_{15}^{(15)}$ bei $n = 15$ größer als 3×10^5 . Damit werden die Folgenglieder mit einem großen Index (die üblicherweise nur mit begrenzter Genauigkeit ermittelt werden können) viel stärker gewichtet, als die Folgenglieder mit einem kleinen Index.

Mit Hinzunahme von weiteren Folgengliedern wird daher die Richardson-Extrapolation nicht nur instabil, sondern verschlechtert sich so sehr, dass die Differenz zwischen dem Preis einer amerikanischen Put-Option und den extrapolierten Werten ein vielfaches (!) vom Ausübungspreis K , was der oberen Grenze für den Preis einer amerikanischen Put-Option entspricht, betragen kann. Übrigens ist das die Erklärung dafür, warum extrapolierte Werte in Abbildung 4.5 nur bis $n \leq 7$ zu finden sind.

Zum Abschluss dieses Abschnittes halten wir fest, dass sowohl eine direkte Berechnung des Preises einer n -Bermuda-Put-Option für große n , als auch die Idee der Richardson-Extrapolation sich nur sehr eingeschränkt erweitern lassen. Im nächsten Abschnitt wird daher eine andere Methode, basierend auf der Early-Exercise-Darstellung aus Kapitel 1, zur Berechnung der Preise von n -Bermuda-Put-Optionen für große n entwickelt.

4.2.2. Approximative Berechnung

In diesem Abschnitt wollen wir die Schwierigkeiten der Auswertung multivariater Normalverteilungen für große Dimensionen umgehen und andere Methoden zur approximativen Berechnung des Preises einer n -Bermuda-Put-Option (für große n) vorschlagen. Auf Grund von Abschätzung (1.47) aus Satz 1.24 können die mit den Methoden aus diesem Abschnitt berechneten Preise ebenso als eine Näherung für den Preis einer amerikanischen Put-Option verwendet werden.

Die Grundidee in diesem Abschnitt ist weitgehend die folgende:

Ansatz 4.19.

- I) Zerlege den Preis $P_n^{(n)}$ einer n -Bermuda-Put-Option in $\hat{P}_n^{(n)}$ und $R_n^{(n)}$, d.h.

$$P_n^{(n)} = \hat{P}_n^{(n)} + R_n^{(n)}.$$

Hierbei werden folgende Bedingungen an $\hat{P}_n^{(n)}$ und $R_n^{(n)}$ gestellt:

- a) $\hat{P}_n^{(n)}$ ist „leicht“ berechenbar
 - b) $R_n^{(n)}$ ist eine Nullfolge
- II) Ignoriere $R_n^{(n)}$ (alternativ, modifiziere zu $\hat{R}_n^{(n)}$) und setze $P_n^{(n)} = \hat{P}_n^{(n)}$ (bzw. alternativ $P_n^{(n)} = \hat{P}_n^{(n)} + \hat{R}_n^{(n)}$).

Bei der Umsetzung greifen wir dabei auf die Early-Exercise-Prämie-Darstellung des Preises einer n -Bermuda-Put-Option zurück und folgen grundsätzlich dem Vorschlag aus Bemerkung 1.45.

Sei nun die Zerlegung $\mathcal{Z}_n = \{0, T/n, 2T/n, \dots, T\}$ für den Rest des Abschnittes fixiert. Wie wir bereits aus Gleichung (1.87) wissen, besitzt der Preis einer n -Bermuda-Put-Option folgende Darstellung

$$P_n^{(n)}(S_0, K, T) = p(S_0, K, T) + e_n^{(n)}(S_0, K, T) + R_n^{(n)}(S_0, K, T). \quad (4.47)$$

Der besondere Vorteil dieser Darstellung liegt darin, dass die multivariaten Normalverteilungen nur im letzten Fehlerterm $R_n^{(n)}$ vorhanden sind. Da dieser mit wachsendem n beliebig klein wird (siehe Lemma 1.41), wird er von vornherein ignoriert und für die Berechnung des Preises einer n -Bermuda-Put-Option eine approximative Formel

$$\hat{P}_n^{(n)}(S_0, K, T) = p(S_0, K, T) + \hat{e}_n^{(n)}(S_0, K, T), \quad (4.48)$$

mit

$$\widehat{e}_n^{(n)}(S_0, K, T) = \sum_{k=1}^{n-1} e^{-rt_k} \left(1 - e^{-r(t_{k+1}-t_k)}\right) K \mathbb{E}^* \left[\mathbb{1}_{\{S_k \leq \widehat{S}_{k,(n)}^*\}} \mid S_0 \right] \quad (4.49)$$

verwendet. Es kommen dabei nur die eindimensionalen Normalverteilungsfunktionen in Formel (4.48) vor und zwar bei der europäischen Put-Option

$$p(S_0, K, T) = K e^{-rT} N(-d_2(S_0, K, T)) - S_0 N(-d_1(S_0, K, T))$$

und bei der Early-Exercise-Prämie $\widehat{e}_n^{(n)}$, denn es gilt

$$\mathbb{E}^* \left[\mathbb{1}_{\{S_k \leq \widehat{S}_k^*\}} \mid S_0 \right] = N\left(-d_2(S_0, \widehat{S}_{k,(n)}^*, t_k)\right),$$

mit

$$d_2(S_1, S_2, t) = \frac{\log \frac{S_1}{S_2} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}}, \quad d_1(S_1, S_2, t) = d_2(S_1, S_2, t) + \sigma\sqrt{t}.$$

Die approximativen kritischen Preise $\widehat{S}_{i,(n)}^*$ für $i = n-1, \dots, 0$ werden rekursiv aus der Gleichung

$$K - \widehat{S}_{i,(n)}^* = p(\widehat{S}_{i,(n)}^*, K, T_i) + \widehat{e}_{n-i}(\widehat{S}_{i,(n)}^*, K, T_i) \left(= \widehat{P}_{n-i}(\widehat{S}_{i,(n)}^*, K, T) \right) \quad (4.50)$$

ausgehend von der Startbedingung $\widehat{S}_{n,(n)}^* = K$ bestimmt¹.

Kallast und Kivinukk [67] (vgl. auch [54]) haben die Anwendung der Newton-Raphson-Methode zur Bestimmung der kritischen Preise $S_{i,(n)}^*$, $i = 0, \dots, n-1$ vorgeschlagen. Wir verfolgen hier den gleichen Ansatz. Es gilt also zu jedem Ausübungspunkt t_i die Fixpunktgleichung (4.50) zu lösen. Dazu wird zunächst das Fixpunktproblem (4.50) in ein Nullstellenproblem $K - S_i - \widehat{P}_{n-i}^{(n)}(S_i) = 0$ umgewandelt. Danach wird die Newton-Raphson-Methode (siehe dazu z.B. [99]) zur Nullstellensuche verwendet. Die Existenz einer Nullstelle (bzw. einer Lösung von (4.50)) wird dabei durch

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{P}_{n-i}^{(n)}}{\partial S_i} &= -N(-d_1(S_i, K, T_i)) \\ &\quad - \sum_{k=i+1}^{n-1} e^{-r(t_k-t_i)} \left(1 - e^{-r(t_{k+1}-t_k)}\right) K \frac{n(d_2(S_i, \widehat{S}_{k,(n)}^*, t_k - t_i))}{S_i \sigma \sqrt{t_k - t_i}} < 0, \end{aligned} \quad (4.51)$$

¹Es gilt $\widehat{e}_{n-i}(S_i, K, T_i) = \sum_{k=i+1}^{n-1} e^{-r(t_k-t_i)} \left(1 - e^{-r(t_{k+1}-t_k)}\right) K N(-d_2(S_i, \widehat{S}_{k,(n)}^*, t_k))$.

4.2 n -Bermuda-Put-Option im Black-Scholes-Modell

$$\lim_{S_i \rightarrow 0} \hat{P}_{n-i}^{(n)} = K e^{-rT_i} + \sum_{k=i+1}^{n-1} e^{-r(t_k - t_i)} \left(1 - e^{-r(t_{k+1} - t_k)}\right) K = K e^{-r(t_{i+1} - t_i)} < K$$

und $\hat{P}_{n-i}^{(n)} \geq 0$ gewährleistet.

Die Newton-Raphson-Iteration für den i -ten kritischen Preis lautet

$$S_{i,k+1} = \frac{S_{i,k} \frac{\partial \hat{P}_{n-i}^{(n)}}{\partial S_i}(S_{i,k}) + K - \hat{P}_{n-i}^{(n)}(S_{i,k})}{1 + \frac{\partial \hat{P}_{n-i}^{(n)}}{\partial S_i}(S_{i,k})}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (4.52)$$

mit dem Startwert $S_{i,0} := \hat{S}_{i+1,(n)}^*$ und den Abbruchbedingungen $|S_{i,k} - S_{i,k-1}| < \epsilon$ und $|K - S_{i,k} - \hat{P}_{n-i}^{(n)}(S_{i,k})| < \epsilon$.

Sobald alle kritischen Preise $\hat{S}_{1,(n)}^*, \hat{S}_{2,(n)}^*, \dots, \hat{S}_{n,(n)}^*$ bestimmt sind, werden sie in Formel (4.48) eingesetzt, um anschließend den Preis einer n -Bermuda-Put-Option zu berechnen.

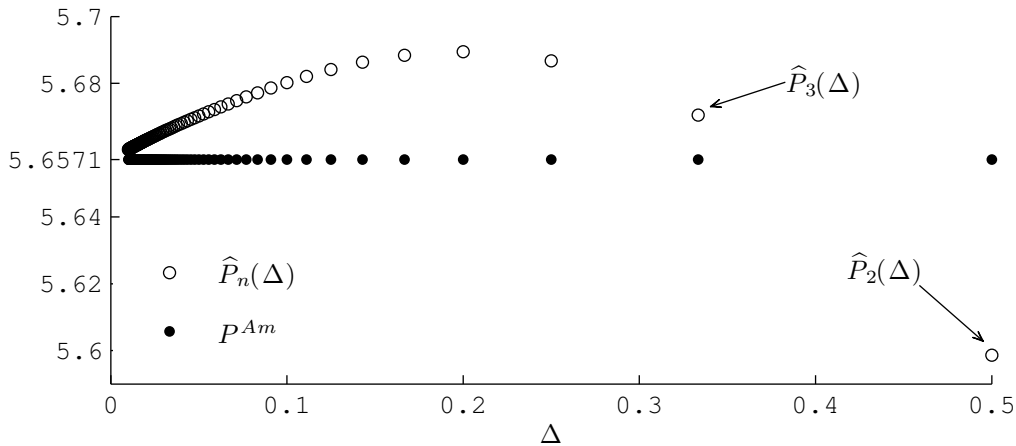


ABBILDUNG 4.6.: APPROXIMATIVE n -BERMUDA-PUT-OPTION \hat{P}_n ALS FUNKTION VON Δ VS. AMERIKANISCHE PUT-OPTION. PARAMETER $S_0=40$, $K = 45$, $r = 0.04$, $\sigma = 0.2$, $T = 1$, $\mathcal{Z}_n = \{0, T/n, 2T/n, \dots, T\}$, $n = 2 \dots, 100$.

In Abbildung 4.6 sind die approximativen Preise $\hat{P}_n^{(n)}$ für $n = 2, 3 \dots, 100$ aufgetragen. Das Bild zeigt das übliche Verhalten der Folge $\hat{P}_n^{(n)}(S_0, K, T; \mathcal{Z}_n)$. Diese steigt monoton an, übertrifft den Preis der amerikanischen Put-Option P^A mit den gleichen Parametern S_0, K, r, σ und T , erreicht dann ihr Maximum und fällt monoton wieder gegen den Preis der amerikanischen Put-Option $P^A(S_0, K, T, r, \sigma)$.

Das erste Glied der Folge $\hat{P}_n^{(n)}(S_0, K, T; \mathcal{Z}_n)$ ist gleich dem Preis der europäischen Put-Option $\hat{P}_1^{(1)} = p^E$ und ist daher immer kleiner als der Preis einer amerikanischen Put-Option mit den gleichen Parametern. Die Ursache dafür, dass die approximierten Preise $\hat{P}_n^{(n)}(\cdot)$ einer n -Bermuda-Put-Option den Preis einer amerikanischen Put-Option übertreffen, liegt an dem negativen Restterm $R_n^{(n)}$, der bei der Berechnung von $\hat{P}_n^{(n)}$ nicht berücksichtigt wird (siehe Begründung oben).

Beobachtung 4.20. Für beliebige Parameter $K, r, \sigma, T \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert auf der Menge $\{S_0 \geq \hat{S}_{0,(n)}^*\}$ ein $\eta := \eta_{(S_0, K, r, \sigma, T)}$, so dass für alle $n \geq \eta$ gilt

$$P^A(S_0, K, T, r, \sigma) \leq \hat{P}_n^{(n)}(S_0, K, T, r, \sigma; \mathcal{Z}_n). \quad (4.53)$$

Bemerkung 4.21. Es ist nicht einfach die Konstante η für jede Wahl der Parameter exakt anzugeben oder diese geeignet nach oben abzuschätzen. Für eine „near the money“ n -Bermuda-Put-Option und für die Volatilität $\sigma \in [0.05, 0.9]$, sowie den Zinssatz $r \in [0.01, 0.1]$ liegt sie jedoch im Bereich $2 \leq \eta \leq 20$.

Die Forderung an S_0 in Beobachtung 4.20 kann nicht ohne Verletzung von Ungleichung (4.53) ignoriert werden, denn auf der Menge $\{S_0 < \hat{S}_{0,(n)}^*\}$ gilt nach der Definition von $\hat{S}_{0,(n)}^*$

$$\hat{P}_n^{(n)}(S_0, K, T, r, \sigma; \mathcal{Z}_n) < K - S_0 \leq P^A(S_0, K, T, r, \sigma). \quad (4.54)$$

Im Folgenden wollen wir von Abschätzung (1.47) Gebrauch machen und aus dieser ein Abbruchkriterium für die Approximation einer amerikanischen Put-Option P^A durch den approximativen Preis der n -Bermuda-Put-Option $\hat{P}_n^{(n)}$ ableiten.

Approximationsfolge $\hat{P}_n^{(n)}$

Der Ansatz hier besteht darin den approximativen Preis einer n -Bermuda-Put-Option $\hat{P}_n^{(n)}$ für eine näherungsweise Berechnung einer amerikanischen Put-Option P^A heranzuziehen. Die Konvergenz der Folge $\hat{P}_n^{(n)}$ folgt aus Lemmata 1.41 und 1.50. Es bleibt ferner die Frage zu klären für welche $n \in \mathbb{N}$ die Abweichung der Preise einer amerikanischen Put-Option P^A und einer approximativen n -Bermuda-Put-Option $\hat{P}_n^{(n)}$ eine vorgegebene Genauigkeit ϵ erreicht. Es wird also ein n_ϵ gesucht, so dass

$$\left| P^A - \hat{P}_n^{(n)} \right| < \epsilon \quad \text{für alle } n > n_\epsilon \quad (4.55)$$

gilt.

Gemäß Abschätzung (1.47) entscheiden wir uns $n_\epsilon \geq KrT/\epsilon$ zu setzen. Zu Überprüfen ist somit, ob $\hat{P}_n^{(n)}$ mit $n = \lfloor KrT/\epsilon \rfloor + 1$ der Abschätzung aus (4.55) genügt. Hierfür

definieren wir ein Sample

$$\mathcal{S} := \{i \mid i = (S_0, K, T, r, \sigma)\}, \quad (4.56)$$

wobei $S_0 \in \{35, 37, \dots, 55\}$, $K = 45$, $T = \{0.2, 0.4, \dots, 2\}$, $r = \{0.01, 0.02, \dots, 0.1\}$ und $\sigma = \{0.1, 0.2, \dots, 0.8\}$ sind. Damit bekommen wir insgesamt 8800 Parametersätze, die einen großen Bereich an unterschiedlichen Szenarien abdecken. Weiter wird wie folgt vorgegangen. Zunächst wird eine Genauigkeit ϵ , die in unserem Fall einen Cent ($\epsilon = 0.01$) beträgt, vorgegeben. Danach wird zu jedem Parametersatz i aus der Stichprobe \mathcal{S} die Menge der Ausübungsmöglichkeiten $\mathcal{Z}_n := \{0, T/n, \dots, (n-1)T/n, T\}$ mit $n = \lfloor KrT/\epsilon \rfloor + 1$ generiert. Abschließend erfolgt die Berechnung der Preise $\hat{P}_n^{(n)}(i)$ und $P^A(i)$ und des Betrags ihrer Differenz $D(i) := |P^A(i) - \hat{P}_n(i)|$. Dabei bezeichnet P^A den Preis einer amerikanischen Put-Option, der approximativ in einem 5×10^4 -periodigen Binomialmodell berechnet wird, d.h. wir setzen $P^A = P_{50k}^{\text{Bin}}$.

In Tabelle 4.1 sind die Ergebnisse der eben beschriebenen Vorgehensweise aufgelistet.

Kenngrößen	Ergebnisse
$\sum_{i=1}^{8800} \mathbb{1}_{\{D(i) \geq 0.01\}}$	0 bzw. 0%
$\max_i \{D(i), i \in \mathcal{S}\}$	0.009998
$\min_i \{D(i), i \in \mathcal{S}\}$	2.09×10^{-11}
$\text{mean}_i \{D(i), i \in \mathcal{S}\}$	0.0012
$\text{std}_i \{D(i), i \in \mathcal{S}\}$	0.0015
$\sum_{i=1}^{8800} \mathbb{1}_{\{D(i) > 0.005\}}$	326 bzw. 3.7%
$\sum_{i=1}^{8800} \mathbb{1}_{\{D(i) < 0.002\}}$	8087 bzw. 91.9%
$\sum_{i=1}^{8800} \mathbb{1}_{\{D(i) < 0.001\}}$	4438 bzw. 50.43%

TABELLE 4.1.: VERGLEICH DER PREISE VON APPROXIMATIVEN n -BERMUDA-PUT-OPTIONEN \hat{P}_n UND AMERIKANISCHEN PUT-OPTIONEN P^A AUF DEM SAMPLE \mathcal{S} (4.56). DABEI IST $D(i) := |P^A(i) - \hat{P}_n(i)|$ MIT $i \in \mathcal{S}$. DIE GEFORDERTE GENAUIGKEIT IST $\epsilon = 0.01$.

Wie aus Tabelle 4.1 hervorgeht, wurde die geforderte Genauigkeit von einem Cent in 100% aller Fälle erreicht. Vielmehr liegt die Differenz der Preise meist (92% aller Fälle) unter 0.002 ($< 2\epsilon/10$) und in 50% der Fälle sogar unter 0.001 ($< \epsilon/10$). Die Güte der Approximation wird noch einmal durch die Kenngrößen, den Mittelwert und die Standardabweichung (mean und std in Tabelle 4.1) der Stichprobe bestätigt.

Lediglich in 3.7% der Fälle ist die Differenz der Preise schlechter als 0.005 und in etwa 1.7% der Fälle (nicht in der Tabelle aufgelistet) schlechter als 0.008. Die Analyse genau dieser Parametersätze ergibt jedoch, dass es sich um solche Fälle handelt, in welchen sich der Aktienkurs S_0 unter dem kritischen Preis S_0^* einer amerikanischen Put-Option befindet. Auf der Menge $\{S_0 \leq S_0^*\}$ ist allerdings die amerikanische Put-Option gleich ihrem inneren Wert $K - S$ und wird somit sofort nach dem Verkauf ausgeübt, de facto gar nicht erst verkauft.

Die nachfolgende Abbildung stellt dies noch einmal grafisch dar. Dort sind die Preise amerikanischer Put-Optionen, berechnet in einem 5×10^4 -periodigen Binomialmodell, für alle Parametersätze $i \in \mathcal{S}$ aufgetragen, für welche die Preise amerikanischer und approximativer n -Bermuda-Put-Optionen um mehr als 0.003 (d.h. $D(i) > 0.003$) voneinander abweichen. Insgesamt sind es 482 Szenarien.

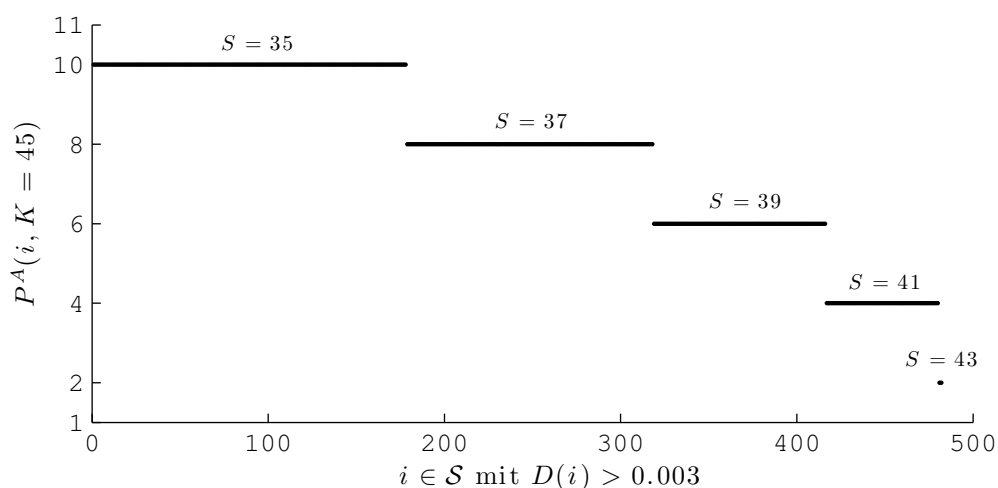


ABBILDUNG 4.7.: PREISE AMERIKANISCHER PUT-OPTIONEN BERECHNET IN EINEM 5×10^4 -BINOMIALMODELL FÜR DIE PARAMETER $i \in \mathcal{S}$, FÜR DIE $D(i) > 0.003$ GILT. DABEI IST $D(i) := |P^A(i) - \hat{P}_n(i)|$.

Wie aus Abbildung 4.7 ersichtlich, sind alle Preise amerikanischer Put-Optionen zu Parametersätzen $i \in \{i \in \mathcal{S} \mid D(i) > 0.003\}$ gleich ihrem inneren Wert. Die Abweichung der Preise in diesen Fällen (auf der Menge $\{S_0 \leq S_0^*\}$) ist allerdings gut kontrollierbar und durch die Schranke $K(1 - e^{-r\Delta_n})$ aus Satz 1.24 exakt beschrieben. Wir interessieren uns vielmehr für die Situationen, in welchen amerikanische Put-Optionen zum Zeitpunkt des

4.2 n -Bermuda-Put-Option im Black-Scholes-Modell

Verkaufs noch „am Leben“, sprich größer ihrer inneren Werte sind. In Tabelle 4.2 haben wir daher die Kennzahlen für die Differenzen $D(i) = |P^A(i) - \hat{P}_n(i)|$ für alle $i \in \mathcal{S}_{\text{new}}$ definiert durch

$$\mathcal{S}_{\text{new}} := \{i \in \mathcal{S} \mid P^A(S, K) > K - S\} \quad (4.57)$$

aufgelistet. Es sind 8271 von insgesamt 8800 Szenarien.

Kenngrößen	Ergebnisse
$\max_i \{D(i), i \in \mathcal{S}_{\text{new}}\}$	0.0024
$\min_i \{D(i), i \in \mathcal{S}_{\text{new}}\}$	2.09×10^{-11}
$\text{median}_i \{D(i), i \in \mathcal{S}_{\text{new}}\}$	9.56×10^{-4}
$\text{mean}_i \{D(i), i \in \mathcal{S}_{\text{new}}\}$	9.29×10^{-4}
$\text{std}_i \{D(i), i \in \mathcal{S}_{\text{new}}\}$	5.29×10^{-4}

TABELLE 4.2.: VERGLEICH DER PREISE APPROXIMATIVER n -BERMUDA-PUT-OPTIONEN \hat{P}_n MIT AMERIKANISCHEN PUT-OPTIONEN P^A AUF DEM BEREINIGTEN SAMPLE \mathcal{S}_{NEW} (4.57). DABEI IST $D(i) := |P^A(i) - \hat{P}_n(i)|$ MIT $i \in \mathcal{S}_{\text{NEW}}$. DIE GEFORDERTE GENAUIGKEIT IST $\epsilon = 0.01$.

Wir stellen fest, dass die größte Abweichung der Preise $P_n^{(n)}$ und P^A sich unter 0.0025 befindet, was wiederum weit unter der geforderten Genauigkeit von einem Cent liegt. Ein Blick auf den Median verrät uns, dass etwa in 50% der Fälle die Abweichung der Preise sogar unter 0.001 (!) bleibt.

Bezogen auf das Gesamtsample \mathcal{S} lässt sich zusammenfassend sagen, dass die größte Abweichung zwischen den Preisen einer amerikanischen Put-Option P^A und einer approximativen n -Bermuda-Put-Option \hat{P}_n auf der Menge $\{S_0 \leq S_0^*\}$ erreicht wird. Auf dieser Menge ist jedoch die maximale Differenz der Preise bekannt und durch die Nullfolge $K(1 - e^{-r\Delta_n})$ nach oben beschränkt. Die Wahl der Approximationsfolge $\hat{P}_n^{(n)}$, sowie des Gliedes mit $n = \lfloor KrT/\epsilon \rfloor + 1$ hat sich somit als geeignet erwiesen, um den Preis einer amerikanischen Put-Option beliebig genau anzunähern. Da das Abbruchkriterium die Modellparameter berücksichtigt, bleibt das Verfahren für jegliche Parametervariation stabil.¹ Demzufolge kann dieses Verfahren, wie auch das Binomialmodell, als Benchmark-Modell verwendet werden.

¹Ein intuitiv naheliegender Gedanke wie zum Beispiel, dass bei der Gewährleistung einer festen Genauigkeit die Erhöhung der Laufzeit einer amerikanischen Put-Option eine Erhöhung der Ausübungsmöglichkeiten einer n -Bermuda-Put-Option nach sich zieht, kann dem Abbruchkriterium direkt entnommen werden.

Zwei-Schritt-Algorithmus

Zum Abschluss des Kapitels wollen wir einen weiteren Algorithmus zur approximativen Berechnung von amerikanischen Put-Optionen (äquivalent dazu auch n -Bermuda-Put-Optionen für große n) präsentieren. Die Methoden, die dabei verwendet werden, können ebenso für andere Problemstellungen von Interesse sein.

Wie bereits im vorherigen Abschnitt werden wir auch hier von der Early-Exercise-Darstellung des Preises einer n -Bermuda-Put-Option ausgehen. Von Bedeutung ist hier allerdings die Abhängigkeit der Preise vom kritischen Rand. Daher wird diese Abhängigkeit explizit angegeben und die Preise als Funktionen vom kritischen Rand betrachtet. Die Menge der Ausübungsmöglichkeiten (Zerlegung) $\mathcal{Z}_n := \{0, T/n, \dots, (n-1)T/n, T\}$ sei für den Rest des Abschnittes fixiert. Der besseren Übersicht wegen lassen wir den auf diese Zerlegung deutenden Index $\cdot^{(n)}$ bzw. $\cdot_{(n)}$ stets weg. Bei Bedarf wird dieser wieder eingefügt.

Nach Satz 1.43 gilt für den Preis einer n -Bermuda-Put-Option

$$P_n(S_0, T; S^*) = \hat{P}_n(S_0, T; S^*) + R_n(S_0, T; S^*), \quad (4.58)$$

mit

$$\hat{P}_n(S_0, T; S^*) = p^E(S_0, K, T) + \sum_{k=1}^{n-1} e^{-rt_k} \left(1 - e^{-r(t_{k+1}-t_k)}\right) K \mathbb{E}^* \left[\mathbb{1}_{\{S_k \leq S_k^*\}} \mid S_0 \right]$$

und R_n wie in Satz 1.43 definiert. Der kritische Rand der n -Bermuda-Put-Option P_n wird dabei mit $S^* := (S_k^*)_{1 \leq k \leq n}$ bezeichnet.

Der Preis der n -Bermuda-Put-Option P_n kann nicht direkt aus Gleichung (4.58), aufgrund der im Fehlerterm R_n enthaltenen multivariaten Normalverteilungen, berechnet werden. Die Idee ist es daher zwei Folgen U_n und O_n zu finden, für die gilt $U_n \leq P_n \leq O_n$ und $O_n - U_n \rightarrow 0$. Es soll dabei möglich sein beide Folgen, also Ober- und Unterfolge, analytisch oder numerisch zu kontrollieren.

Es seien nun $B := (B_k)_{1 \leq k \leq n}$ und $H := (H_k)_{1 \leq k \leq n}$ zwei (deterministische) Folgen¹ mit Werten in $[0, K]$ und den folgenden Eigenschaften: a) $B_k \leq S_k^* \leq H_k$ für alle $1 \leq k \leq n$; b) $B_n = H_n = K$.

Aus Lemma 1.49 und der Tatsache, dass der Fehlerterm R_n negativ ist (siehe Abschnitt 1.4), folgt dann einerseits

$$P_n(S_0, T; S^*) \leq \hat{P}_n(S_0, T; H) \quad (4.59)$$

¹Wir werden sie gelegentlich auch Ränder nennen.

und andererseits, unter Zuhilfenahme von Lemma 1.41

$$\widehat{P}_n(S_0, T; B) - G_n \leq P_n(S_0, T; S^*), \quad (4.60)$$

wobei G_n eine Nullfolge mit $-G_n \leq R_n$ ist.

Somit haben wir eine Ober- und Unterfolge gefunden, für die gilt

$$\widehat{P}_n(S_0, T; B) - G_n \leq P_n(S_0, T; S^*) \leq \widehat{P}_n(S_0, T; H).$$

Für die Differenz der beiden Folgen kann nach Lemma 1.50 folgende obere Schranke angegeben werden

$$\left| \widehat{P}_n(S_0, T; H) - (\widehat{P}_n(S_0, T; B) - G_n) \right| \leq \frac{rK}{\sqrt{2\pi}\sigma} \left(3\sqrt{\Delta_n} + 2\sqrt{T} \right) \|H_k - B_k\|_\infty + |G_n|. \quad (4.61)$$

Dabei steht $\|H_k - B_k\|_\infty$ für $\max_k |H_k - B_k|$ und $\Delta_n = T/n$. Demnach besitzen die Oberfolge $\widehat{P}_n(\cdot; H)$ und die Unterfolge $\widehat{P}_n(\cdot; B) - G_n$ denselben Grenzwert, sobald die maximale Differenz der Ränder H und B mit wachsendem n gegen Null strebt.

Es bleibt noch die Frage zu klären wie die beiden Ränder H und B zu finden sind. Dazu definieren wir für einen Rand $L := (L_k)_{i+1 \leq k \leq n}$ mit $L_n = K$

$$\widehat{P}_{n-i}^{(n)}(S_i, T_i; L) := p^E(S_i, L_n, T_i) + \sum_{k=i+1}^{n-1} e^{-r(t_k - t_i)} \left(1 - e^{-r(t_{k+1} - t_k)} \right) K \mathbb{E}^* [\mathbb{1}_{\{S_k \leq L_k\}} | S_i], \quad (4.62)$$

wobei $T_i := T - t_i$ ist.

Beobachtung 4.22. Es seien die Ränder $B := (B_i)_{1 \leq i \leq n}$ und $H := (H_i)_{1 \leq i \leq n}$ mit $B_n = H_n = K$ wie folgt rekursiv definiert

$$\begin{aligned} K - B_i &= \widehat{P}_{n-i}^{(n)}(B_i, T_i; B) - G_n, \quad i = n-1, \dots, 1, \\ K - H_i &= \widehat{P}_{n-i}^{(n)}(H_i, T_i; H) - F_n, \quad i = n-1, \dots, 1. \end{aligned}$$

Hierbei ist $\widehat{P}_{n-i}^{(n)}$ definiert wie in (4.62) und die Konstanten G_n und F_n so gewählt, dass die obigen impliziten Gleichungen auflösbar sind. Falls weiter $0 \leq G_n \leq F_n$ gilt, so folgt daraus $B_i \leq H_i$ für $i = 1, 2, \dots, n$.

Beispiel 4.23. Es seien folgende Parameter gegeben: die Laufzeit $T = 1$, der Zinssatz $r = 0.04$, die Volatilität $\sigma = 0.3$ und der Ausübungspreis $K = 45$. Weiterhin sei die Zerlegung $\mathcal{Z}_n = \{iT/n \mid i = 0, 1, \dots, n\}$ fixiert. Wir wollen die Ränder $B^j := (B_{i,(n)}^j)_{1 \leq i \leq n}$

für $j = 1, 2, 3$ aus

$$K - B_i^j = \widehat{P}_{n-i}^{(n)}(B_i^j, T_i; B^j) - G^j, \quad i = n-1, \dots, 1, \quad j = 1, 2, 3 \quad (4.63)$$

für $G^1 = 0$, $G^2 = 0.05$ und $G^3 = 0.1$ berechnen und uns so vergewissern, dass die Behauptung $B_i^1 \leq B_i^2 \leq B_i^3$ für $i = 1, 2, \dots, n$ erfüllt ist. Die nach Vorschrift (4.63) berechneten Ränder sind in Abbildung 4.8 aufgetragen. Wie aus der Abbildung hervorgeht, wird unsere Beobachtung 4.22 für dieses Beispiel grafisch bestätigt.

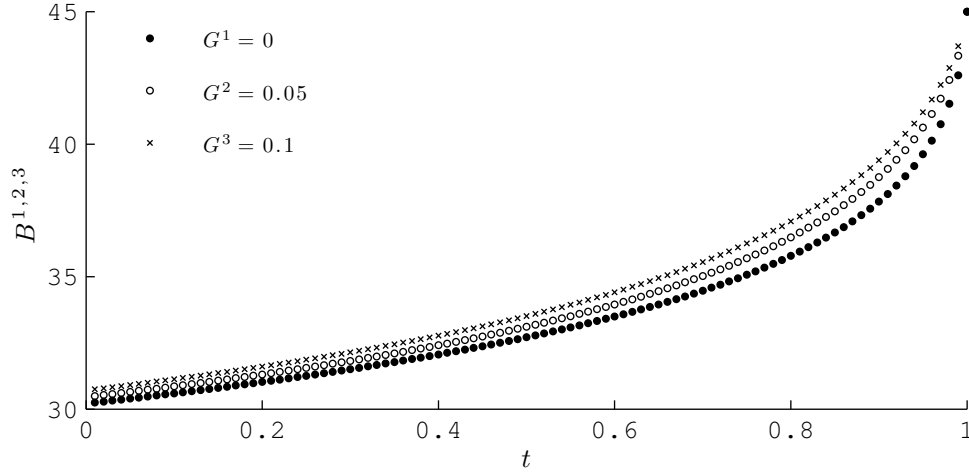


ABBILDUNG 4.8.: VERGLEICH DER KRITISCHEN RÄNDER G^1 , G^2 UND G^3 BERECHNET NACH (4.63). PARAMETER: $S_0=45$, $K = 45$, $r = 0.04$, $\sigma = 0.3$, $T = 1$, $\mathcal{Z}_n = \{0, T/n, 2T/n, \dots, T\}$, $n = 100$.

Nun haben wir alle benötigten Bestandteile für den Zwei-Schritt-Algorithmus zur Verfügung und können somit mit seiner Beschreibung beginnen.

Algorithmus 4.24 (Zwei-Schritt-Algorithmus).

Initialisiere die Parameter: den Aktienkurs S_0 , den Ausübungspreis K , die Laufzeit T , den Zinssatz r und die Volatilität σ . Definiere die Anzahl n und die Menge der Ausübungsmöglichkeiten $\mathcal{Z}_n = \{0 = t_0, t_1, \dots, t_n = T\}$.

SCHRITT 1

Starte mit $B_n = H_n = K$ und berechne $B := (B_i)_{1 \leq i \leq n}$, $H := (H_i)_{1 \leq i \leq n}$ rekursiv aus

$$K - B_i = \widehat{P}_{n-i}^{(n)}(B_i, T_i; B), \quad i = n-1, \dots, 1, \quad (4.64)$$

$$K - H_i = \widehat{P}_{n-i}^{(n)}(H_i, T_i; H) - G_n, \quad i = n-1, \dots, 1. \quad (4.65)$$

Dabei ist $\widehat{P}_{n-i}^{(n)}$ definiert wie in (4.62) und G_n eine Nullfolge mit $-G_n \leq R_n$.

SCHRITT 2

Berechne die Oberfolge O_n und die Unterfolge U_n aus

$$O_n := \widehat{P}_n^{(n)}(S_0, T; H) \quad (4.66)$$

$$U_n := \widehat{P}_n^{(n)}(S_0, T; B) - G_n, \quad (4.67)$$

sowie ihre Differenz $D_n := O_n - U_n$.

Für den Preis einer n -Bermuda-Put-Option P_n aus (4.58) gilt $U_n \leq P_n \leq O_n$, bzw. $O_n - P_n \leq D_n$.

In der nachstehenden Abbildung 4.9 wird die Arbeitsweise des Zwei-Schritt-Algorithmus noch einmal grafisch erläutert. Als Folge G_n haben wir beispielhaft $K(1 - e^{-r\Delta_n})$ genommen.

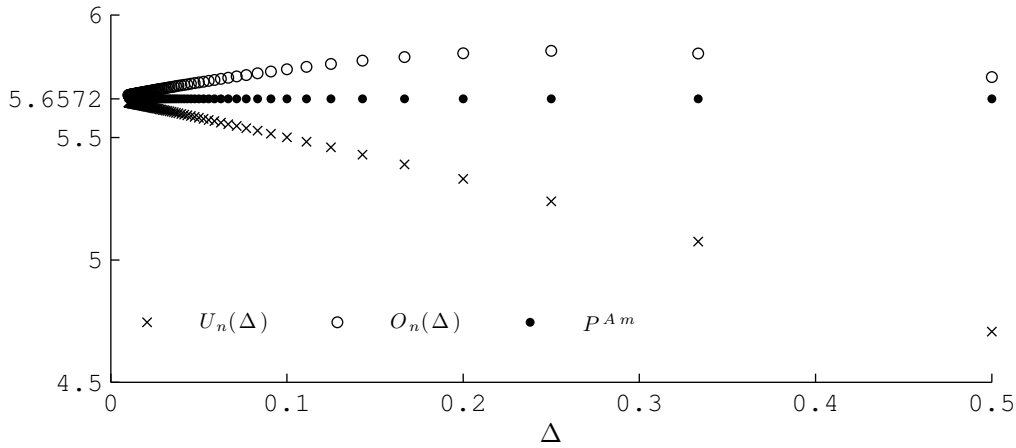


ABBILDUNG 4.9.: FUNKTIONSWEISE EINES ZWEI-SCHRITT-ALGORITHMUS. PARAMETER: $S_0=50$, $K=45$, $r=0.05$, $\sigma=0.2$, $T=1$, $\mathcal{Z}_n = \{0, T/n, 2T/n, \dots, T\}$, $n=2 \dots, 100$.

Bemerkung 4.25. Die Ergebnisse aus Kapitel 1 belegen, dass der Zwei-Schritt-Algorithmus konvergent ist (dies wird ebenso durch Abbildung 4.9 bestätigt). Hierin liegt auch der Vorteil des Algorithmus. Seine Nachteile sind die folgenden. Zunächst ist der Zwei-Schritt-Algorithmus ein a posteriori Algorithmus. D.h. die Differenz zwischen der Ober- und Unterfolge wird erst nach der Berechnung bekannt. Falls diese jedoch nicht ausreichend ist, muss eine weitere Berechnung mit einer größeren Anzahl an Ausübungsmöglichkeiten durchgeführt werden. Weiterhin gestaltet sich die Wahl der Nullfolge G_n als schwierig. In unserem Fall könnten wir zwar von Abschätzung (1.80) aus Lemma 1.41 Gebrauch machen, müssten die Berechnung jedoch wegen der allzu großen Konstante aufgeben. Sobald also eine kleinere Konstante oder gar eine bessere Ordnung für die Differenz $|P^A - \widehat{P}|$ in Abschätzung (1.80) bekannt ist, kann der Zwei-Schritt-Algorithmus als ein wichtiges Werkzeug zur Berechnung der Preise amerikanischer Put-Optionen (bzw. n -Bermuda-Put-Optionen für große n) dienen.

Algorithmenvergleich

Zum Abschluss ist in Tabelle 4.3 ein direkter Vergleich aller in dieser Arbeit beschriebenen Algorithmen auf dem Parametersample aus der Originalarbeit von Geske und Johnson [41] gegenübergestellt. In Spalte 5 von Tabelle 4.3 befinden sich die Preise amerikanischer Put-Optionen P^A berechnet im 10^5 -periodigen Binomialmodell. In den Spalten 6-9 sind die absoluten Abweichungen zu den Ergebnissen aus Spalte 5 aufgetragen. Wie auch zu erwarten war, eignen sich sowohl eine direkte Berechnung einer n -Bermuda-Put-Option (vgl. 10-Bermuda-Put-Option P_{10}^{GJ} in der Tabelle), als auch die Richardson-Extrapolation $P_{1,2,3,4}^{RE}$, basierend auf den ersten vier Gliedern der Folge P_n (vgl. Formel (4.46)), am schlechtesten zu einer approximativen Berechnung der Preise amerikanischer Put-Optionen. In beiden Fällen sind nahezu zu jeder Parameterwahl die größten Abweichungen zum Preis einer amerikanischen Put-Option zu verzeichnen. Die Approximationsfolge \hat{P}_{n_ϵ} mit $n_\epsilon = \lfloor KrT/\epsilon \rfloor + 1$ weist hingegen die geringsten Abweichungen auf. Die geforderte Genauigkeit ϵ wurde dabei in allen Fällen erreicht. Die Tatsache, dass die absoluten Abweichungen bei $\hat{P}_{n_{\epsilon_2}}$ geringer als bei $\hat{P}_{n_{\epsilon_1}}$ ausfallen, ist allein auf die unterschiedlichen geforderten Genauigkeiten $\epsilon_1 = 0.01$ und $\epsilon_2 = 0.001$ zurückzuführen. Weiterhin lässt sich mit den Ergebnissen aus der Tabelle die Beobachtung bestätigen, dass die größten Abweichungen $|P^A - \hat{P}_{n_\epsilon}|$ auf der Menge $\{S_0 < S_0^*\}$ erreicht werden (vgl. die Zeile, in welcher der Preis einer amerikanischen Put-Option gleich ihrem inneren Wert ist, d.h. bei $P^A = 5$). Zusammenfassend lässt sich sagen, dass unser Vorschlag die Approximationsfolge \hat{P}_{n_ϵ} mit $n_\epsilon = \lfloor KrT/\epsilon \rfloor + 1$ als Benchmark-Modell bei der Berechnung der Preise amerikanischer Put-Optionen zu verwenden, erneut Bestätigung findet. Abschließend sei hier erwähnt, dass die Berechnung von Spalte 6 der Tabelle 4.3, also der Preise von 10-Bermuda-Put-Optionen, eineinhalb Tage gedauert hat, wohingegen die Berechnung anderer Spalten nur wenige Minuten in Anspruch nahm.

r	K	σ	T	P^A	P_{10}^{GJ}	$P_{1,2,3,4}^{RE}$	$\hat{P}_{n_{\epsilon_1}}$	$\hat{P}_{n_{\epsilon_2}}$
0.1250	1.00	0.50	1.00	0.1480	0.0016	0.0000	0.0007	0.0001
0.0800	1.00	0.40	1.00	0.1260	0.0011	0.0002	0.0004	0.0001
0.0450	1.00	0.30	1.00	0.1005	0.0006	0.0001	0.0001	0.0001
0.0200	1.00	0.20	1.00	0.0711	0.0002	0.0008	0.0002	0.0000
0.0050	1.00	0.10	1.00	0.0377	0.0001	0.0003	0.0003	0.0000
0.0900	1.00	0.30	1.00	0.0861	0.0010	0.0004	0.0006	0.0001
0.0400	1.00	0.20	1.00	0.0640	0.0004	0.0002	0.0002	0.0001
0.0100	1.00	0.10	1.00	0.0357	0.0001	0.0005	0.0002	0.0000
0.0800	1.00	0.20	1.00	0.0527	0.0010	0.0002	0.0006	0.0001
0.0200	1.00	0.10	1.00	0.0322	0.0002	0.0004	0.0000	0.0001
0.1200	1.00	0.20	1.00	0.0441	0.0011	0.0000	0.0008	0.0001
0.0300	1.00	0.10	1.00	0.0293	0.0002	0.0005	0.0003	0.0001
0.0488	35.00	0.20	0.0833	0.0062	0.0030	0.0086	0.0000	0.0000
0.0488	35.00	0.20	0.3333	0.2004	0.0083	0.0012	0.0001	0.0000
0.0488	35.00	0.20	0.5833	0.4328	0.0064	0.0081	0.0002	0.0000
0.0488	40.00	0.20	0.0833	0.8523	0.0042	0.0081	0.0002	0.0001
0.0488	40.00	0.20	0.3333	1.5799	0.0107	0.0172	0.0008	0.0001
0.0488	40.00	0.20	0.5833	1.9905	0.0142	0.0160	0.0009	0.0001
0.0488	45.00	0.20	0.0833	5.0000	0.0201	0.0001	0.0062	0.0006
0.0488	45.00	0.20	0.3333	5.0883	0.0169	0.0170	0.0021	0.0002
0.0488	45.00	0.20	0.5833	5.2670	0.0279	0.0235	0.0019	0.0002
0.0488	35.00	0.30	0.0833	0.0775	0.0004	0.0208	0.0001	0.0000
0.0488	35.00	0.30	0.3333	0.6976	0.0015	0.0146	0.0001	0.0000
0.0488	35.00	0.30	0.5833	1.2199	0.0092	0.0121	0.0003	0.0001
0.0488	40.00	0.30	0.0833	1.3102	0.0005	0.0228	0.0001	0.0001
0.0488	40.00	0.30	0.3333	2.4827	0.0076	0.0193	0.0007	0.0001
0.0488	40.00	0.30	0.5833	3.1697	0.0175	0.0029	0.0009	0.0001
0.0488	45.00	0.30	0.0833	5.0597	0.0090	0.0012	0.0017	0.0002
0.0488	45.00	0.30	0.3333	5.7057	0.0144	0.0211	0.0015	0.0002
0.0488	45.00	0.30	0.5833	6.2437	0.0210	0.0271	0.0015	0.0002
0.0488	35.00	0.40	0.0833	0.2467	0.0037	0.0082	0.0001	0.0000
0.0488	35.00	0.40	0.3333	1.3462	0.0026	0.0037	0.0002	0.0000
0.0488	35.00	0.40	0.5833	2.1550	0.0094	0.0068	0.0004	0.0001
0.0488	40.00	0.40	0.0833	1.7685	0.0048	0.0060	0.0000	0.0001
0.0488	40.00	0.40	0.3333	3.3876	0.0102	0.0033	0.0007	0.0001
0.0488	40.00	0.40	0.5833	4.3528	0.0072	0.0347	0.0009	0.0001
0.0488	45.00	0.40	0.0833	5.2870	0.0011	0.0012	0.0011	0.0002
0.0488	45.00	0.40	0.3333	6.5099	0.0147	0.0169	0.0013	0.0002
0.0488	45.00	0.40	0.5833	7.3831	0.0264	0.0038	0.0013	0.0002
$\max P^A - \mathcal{P} , \mathcal{P} \in \{P_{10}^{GJ}, P_{1,2,3,4}^{RE}, \hat{P}_{n_{\epsilon_1}}, \hat{P}_{n_{\epsilon_2}}\} :$					0.0279	0.0347	0.0062	0.0006

TABELLE 4.3.: ALGORITHMENVERGLEICH. $S_0 = 1$ FÜR $K = 1$ UND $S_0 = 40$ FÜR $K \neq 1$. $P^A := P_{100k}^{\text{Bin}}, P_{10}^{GJ}$ - 10-BERMUDA-PUT-OPTION NACH DER GESKE-JOHNSON-FORMEL, $P_{1,2,3,4}^{RE}$ - RICHARDSON-EXTRAPOLATION VON 1,2,3,4-BERMUDA-PUT-OPTIONEN. $\hat{P}_{n_{\epsilon}}$ - APPROXIMATIVE BERMUDA-PUT-OPTION MIT $n_{\epsilon} = \lfloor KrT/\epsilon \rfloor + 1$. DIE GEFORDERTEN GENAUIGKEITEN $\epsilon_1 = 10^{-2}$, $\epsilon_2 = 10^{-3}$. IN DEN SPALTEN 6-9 SIND DIE BETRÄGE DER DIFFERENZ ZU P^A AUFGETRAGEN.

Zusammenfassung

Diese Arbeit hat den Ansatz von Geske und Johnson [41] zur Bewertung amerikanischer Put-Optionen aufgegriffen und weiterentwickelt. Ebenso wie in [41], wurde auch hier eine n -Bermuda-Put-Option eingeführt. Für $n = 1$ ist sie dabei eine europäische Put-Option und im Grenzwert ($n \rightarrow \infty$) stellt sie eine amerikanische Put-Option dar. Diese Verallgemeinerungseigenschaft hat unser Interesse am Studium der Eigenschaften von n -Bermuda-Put-Optionen geweckt.

Kapitel 1. Der Beweis für die analytische Preisformel einer n -Bermuda-Put-Option nach Geske und Johnson [41] wurde wesentlich später von Prékopa und Szántai [97] präsentiert. Im Gegensatz zu Prékopa und Szántai [97], die zum Teil technisch aufwendige Methoden, ähnlich denen aus Kapitel 2, verwendeten, haben wir hier zunächst den Preis einer n -Bermuda-Put-Option als diskontierten Erwartungswert aller zukünftigen Auszahlungen dargestellt

$$P_n(S, K, T) = \mathbb{E}^* \left[\sum_{k=1}^n e^{-rt_k} (K - S_k) \mathbb{1}_{\{S_1 > S_1^*, \dots, S_{k-1} > S_{k-1}^*, S_k \leq S_k^*\}} \mid S_0 = S \right].$$

Gemeinsam mit einer besseren Interpretierbarkeit lässt sich dieser zudem mit einfachen Mitteln analytisch berechnen, woraus dann die Geske-Johnson-Formel (1.10) hergeleitet werden kann.

Wie oben bereits erwähnt wurde, konvergiert der Preis einer n -Bermuda-Put-Option gegen eine amerikanische Put-Option mit den gleichen Parametern. Weiterhin kann sogar eine explizite Abschätzung für die Differenz der Preise beider Optionstypen angegeben werden, nämlich $P^A - P_n \leq K(1 - e^{-r\Delta_n})$ (vgl. [21]). Mit Hilfe dieser Abschätzung haben wir die folgende obere Schranke für die Differenz der kritischen Ränder amerikanischer und n -Bermuda-Put-Optionen bekommen

$$S_{t,(n)}^* - S_t^* \leq \sigma K \sqrt{\frac{e^{r\tau}}{rN\left(-\frac{r}{\sigma}\sqrt{\tau}\right)}} \sqrt{1 - e^{-r\Delta_n}}.$$

Darüber hinaus wurden Abschätzungen für die Differenzen zweier kritischer Preise auf dem kritischen Rand einer n -Bermuda-Put-Option (vgl. Formel (1.59)), sowie einer amerikanischen Put-Option (vgl. Formel (1.58)) hergeleitet. Die Möglichkeit für die numerische Berechnung der Preise amerikanischer Put-Optionen (bzw. Bermuda-Put-Optionen für große n) wird erst mit der Early-Exercise-Prämie-Darstellung (EEP-Darstellung) einer n -Bermuda-Put-Option eröffnet. Danach lässt sich der Preis einer n -Bermuda-Put-

Option als der Preis einer europäischen Put-Option zuzüglich einer Prämie schreiben: $P_n = p^E + E_n$. Diese Zerlegung wurde in einen gegen die EEP-Darstellung einer amerikanischen Put-Option konvergenten Term \hat{P}_n und einen Restterm R_n umgeformt, d.h. $P_n = \hat{P}_n + R_n$. Dabei gilt

$$\hat{P}_n(S_0, K, T) = p^E(S_0, K, T) + \sum_{k=1}^{n-1} e^{-rt_k} \left(1 - e^{-r(t_{k+1}-t_k)}\right) K \mathbb{E}^* \left[\mathbb{1}_{\{S_k \leq S_k^*\}} \mid S_0 \right]$$

und $R_n = \mathcal{O}(\sqrt{\Delta_n})$ mit bekannten Konstanten (vgl. Formel (1.80)). Die Größe \hat{P}_n haben wir als approximativen Preis einer n -Bermuda-Put-Option bezeichnet und als Funktion des kritischen Randes untersucht (siehe Lemma 1.49 und Lemma 1.50).

Weiterhin haben wir gezeigt, dass zu einer approximativen Berechnung des Preises einer amerikanischen Put-Option mit geringer Restlaufzeit keine genaue Approximation des kritischen Randes erforderlich ist (siehe Lemma 1.52).

Kapitel 2. Das zweite Kapitel hat sich hauptsächlich mit der Berechnung der partiellen Ableitungen (Sensitivitäten) einer n -Bermuda-Put-Option beschäftigt. Dabei spielte die folgende Hilfsrelation, die eine Verallgemeinerung zum europäischen Fall ist, eine wichtige Rolle

$$K \sum_{k=1}^n e^{-rt_k} \frac{dN_k(\mathbf{b}_{1k}; \mathbf{R}_{1k})}{dz} - S \sum_{k=1}^n \frac{dN_k(\mathbf{a}_{1k}; \mathbf{R}_{1k})}{dz} = 0$$

für $z \in \{S, K, r\}$. Damit lassen sich die partiellen Ableitungen des Preises einer n -Bermuda-Put-Option nach den Variablen S, K und r einfach berechnen (vgl. Sätze 2.16, 2.17 und 2.18). Des Weiteren wurden alle Sensitivitätsgrößen auf das Vorzeichen untersucht. Wie auch bei einer europäischen Put-Option lässt sich über das Vorzeichen von Theta (partielle Ableitung nach der Restlaufzeit) einer n -Bermuda-Put-Option keine eindeutige Aussage treffen. Genauer, je nach Modellparameter kann Theta sowohl positive, als auch negative Werte annehmen. Das ist insofern interessant, da Theta einer amerikanischen Put-Option immer positiv ist.

Zum Abschluss des Kapitels wurde gezeigt, dass eine n -Bermuda-Put-Option die folgende Homogenitätseigenschaft besitzt

$$P_n(S, K, T, r, \sigma) = P_n(S, K, \lambda T, \frac{r}{\lambda}, \frac{\sigma}{\sqrt{\lambda}}), \quad \lambda > 0.$$

Diese überträgt sich durch den Grenzübergang auch auf amerikanische Put-Optionen.

Kapitel 3. In diesem Kapitel wurden die Eigenschaften des kritischen Randes einer n -Bermuda-Put-Option, sowie die Frage wie weit sich einige Eigenschaften auf den kritischen Rand einer amerikanischen Put-Option übertragen lassen, behandelt. Zunächst wurden alle bis dahin vorausgesetzten Eigenschaften, wie Existenz, Eindeutigkeit und Monotonie des kritischen Randes bewiesen. Darüber hinaus wurde die Optimalität des kritischen Randes gezeigt, sowie sein Verhalten als Funktion von den Parametern K, T, r

und σ untersucht. Einer der wesentlichen Resultate dieses Kapitels ist das folgende Verhalten des kritischen Randes einer amerikanischen Put-Option als eine Funktion der Parameter K, r, σ und T

$$S^*(K, T, r, \sigma) = KS^*(1, T, r, \sigma) = KS^*(1, 1, rT, \sigma\sqrt{T}).$$

Die erste Gleichung besagt, dass der kritische Rand eine lineare Funktion des Ausübungspreises K ist. Die zweite in dieser Arbeit hergeleitete Gleichung folgt aus der Invarianz des kritischen Randes S^* bezüglich der Variablentransformation $(T, r, \sigma) \rightarrow (\lambda T, r/\lambda, \sigma/\sqrt{\lambda})$. Eine gute analytische Approximation des kritischen Randes soll diese Eigenschaften (Linearität und Invarianz) wiedergeben können (vgl. z.B. die Approximation von Barone-Adesi und Whaley [6]).

Kapitel 4. Das letzte Kapitel dieser Arbeit beschäftigt sich mit der Frage der numerischen Berechnung des Preises einer n -Bermuda-Put-Option. Angesichts der Abschätzung

$$P^A - P_n \leq K(1 - e^{-r\Delta_n})$$

kann eine Bermuda-Put-Option zur approximativen Berechnung des Preises einer amerikanischen Put-Option herangezogen werden. Danach lässt sich auch ein n_ϵ ermitteln, so dass für alle $n \geq n_\epsilon$ eine vorgegebene Genauigkeit ϵ erreicht werden kann. Die analytische Formel für P_n (Geske-Johnson-Formel (1.10)) ist jedoch für $n \geq n_\epsilon$ im Allgemeinen aufgrund der dort auftretenden multivariaten Normalverteilungen nicht anwendbar. Im Abschnitt „Direkte Berechnung“ wurde diese Problematik näher beleuchtet. Darüber hinaus wurden dort Techniken zur Reduzierung des Rechenaufwandes vorgeschlagen und die in der Literatur vorhandenen Verfahren zur Berechnung von multivariaten Normalverteilungen vorgestellt. Wir haben uns für den Algorithmus von Genz (Algorithmus 4.15), einen der meistverwendeten Algorithmen zur Berechnung von Verteilungen solcher Art, entschieden. Dazu wurden alle in der Geske-Johnson-Formel auftretenden multivariaten Verteilungsfunktionen der Normalverteilung auf die vom Algorithmus benötigte Form gebracht (vgl. Formel (4.37)) und nach der von Genz [37] vorgeschlagenen Variablentransformation als ein Integral über einen multidimensionalen Einheits-Hyperwürfel dargestellt (vgl. Formel (4.39)). Letzteres wurde mit Hilfe von (Quasi-)Monte-Carlo-Methoden approximativ berechnet. Dennoch ist eine direkte Berechnung des Preises einer n -Bermuda-Put-Option nach der Formel von Geske und Johnson ein rechenintensiver Prozess und bleibt nur für kleine n ($n \leq 20$) praktisch durchführbar.

Um eine numerische Berechnung des Preises einer n -Bermuda-Put-Option für große n (und somit einer amerikanischen Put-Option) zu ermöglichen, wurde auf die EEP-Darstellung einer n -Bermuda-Put-Option $P_n = \hat{P}_n + R_n$ aus Kapitel 1 zurückgegriffen. Weil der Fehlerterm R_n mit wachsendem n gegen null strebt, wurde dieser zunächst bei der Berechnung nicht berücksichtigt. Da weiterhin die Folge \hat{P}_n der approximativen Preise einer n -Bermuda-Put-Option gegen den Preis einer amerikanischen Put-Option mit gleichen Parametern konvergiert, ging es allein um die Frage, wann diese abgebrochen werden sollte, um eine vorgegebene Genauigkeit ϵ dennoch zu erreichen. Dafür haben

wir das Folgenglied \hat{P}_{n_ϵ} , mit $n_\epsilon = \lfloor KrT/\epsilon \rfloor + 1$ vorgeschlagen. Diese Wahl wurde auf einem großen Sample getestet (8800 Parameter). Es hat sich gezeigt, dass die maximale Differenz der Preise einer amerikanischen Put-Option P^A und einer approximativen Bermuda-Put-Option \hat{P}_n auf der Menge $\{S_0 \leq S_{0,(n)}^*\}$ erreicht wird. Auf dieser Menge ist jedoch die maximale Differenz durch die Nullfolge $K(1 - e^{-r\Delta_n})$ nach oben beschränkt. Somit hat sich das Abbruchkriterium (das aus der obigen Nullfolge abgeleitet wurde) als geeignet erwiesen, um die Preise einer amerikanischen Put-Option beliebig genau zu approximieren.

Der Vorschlag von Broadie und Detemple [17] das Binomialmodell als Benchmark-Modell bei der Bewertung amerikanischer Put-Option zu verwenden hat sich in der Literatur etabliert und wird seither einheitlich benutzt. Diesem Beispiel folgend wurde im vierten Kapitel das Binomialmodell eingeführt und die Bewertung in diesem kurz skizziert. Darüber hinaus wurde der kritische Rand einer amerikanischen Put-Option im Binomialmodell definiert und auf die Existenz und Eindeutigkeit untersucht. Basierend auf den Ideen von Kim und Byun [72] wurde ein Algorithmus (Boundary-Algorithmus) entwickelt, der den kritischen Rand als einen wichtigen Bestandteil der Berechnungsprozedur in die Berechnung integriert. Es hat sich gezeigt, dass bei der Bewertung amerikanischer Put-Optionen der Boundary-Algorithmus mindestens 2- bis 3-mal schneller ist (je nach Modellparametern) als der klassische Cox-Ross-Rubinstein-Algorithmus (CRR-Algorithmus). Eine besondere Eigenschaft des neuen Algorithmus besteht darin, dass dieser schlicht eine optimierte Version des CRR-Algorithmus ist und somit mit allen für den CRR-Algorithmus entwickelten Konvergenz-Beschleunigungstechniken (wie Richardson-Extrapolation, Control-Variates-Technik) kompatibel ist. Aufgrund seiner Schnelligkeit und intuitiver Handhabung sollte der Boundary-Algorithmus, unserer Meinung nach, anstelle des klassischen CRR-Algorithmus verwendet werden. Alternativ kann die Approximationsfolge \hat{P}_n ebenso die Rolle eines Benchmark-Modells bei der Berechnung der Preise amerikanischer Put-Optionen übernehmen.

Ausblick. Ähnliche Strukturen, wie die in der analytischen Geske-Johnson-Formel, lassen sich auch bei Compound-Optionen (Optionen auf Optionen) und bei Installment-Optionen (Optionen, bei denen die Optionsprämie nicht sofort, sondern über die Optionsdauer verteilt entrichtet wird, mit der Möglichkeit jederzeit aus dem Optionskontrakt auszusteigen) erkennen. Es wäre daher interessant zu untersuchen, welche und vor allem wie weit sich Methoden dieser Arbeit auf die eben genannten Optionstypen übertragen lassen. Ebenso interessant wäre die Anwendung einiger Ergebnisse dieser Arbeit (wie z.B. diskrete Early-Exercise-Prämie-Darstellung) auf allgemeinere Modelle, wie etwa Modelle mit Sprungprozessen oder stochastischer Volatilität. Falls sich eine kleinere Konstante oder eine bessere Ordnung als $\mathcal{O}(\sqrt{\Delta_n})$ für die Abschätzung des Fehlerterms R_n finden lassen, kann der Ansatz des Zwei-Schritt-Algorithmus erneut aufgegriffen und weiterverfolgt werden. Im Binomialmodell lässt sich in einigen Fällen, wie etwa bei amerikanischen at-the-money Put-Optionen (vgl. Anhang B), eine monotone Konvergenz gegen die Preise amerikanischer Put-Optionen im Black-Scholes-Modell beobachten. Die Frage nach der Konstruktion eines Binomialbaumes, in welchem die monotone Konvergenz auch für andere Wahlen des Ausübungspreises bestehen bleibt, ist noch zu klären.

A. Multivariate Normalverteilung

In Kapitel 2 wurde beim Beweis von Satz 2.1 auf den Anhang verwiesen. Da der Beweis von Satz 2.2 (Verallgemeinerung von 2.1) mit Ausnahme der marginalen Änderungen, identisch zum Beweis von Satz 2.1 verläuft, wurde Satz 2.2 in der Arbeit nur kurz skizziert. Damit die Arbeit dennoch in sich abgeschlossen und die Beweisskizze verständlich bleibt, präsentieren wir unten den fehlenden Beweis von Satz 2.1. Dabei folgen wir Thomassen und Van Wouwe [108]. Eine weitere empfehlenswerte Referenz, wenn es um das Studium von mehrdimensionalen Normalverteilungen geht, ist Tong [111].

Definition A.1. Sei \mathbf{C} eine positiv definite Matrix. Die Verteilungsfunktion der k -dimensionalen Standardnormalverteilung an der Stelle (a_1, \dots, a_k) ist definiert durch

$$N_k(a_1, \dots, a_k; \mathbf{C}) = \int_{-\infty}^{a_1} \dots \int_{-\infty}^{a_k} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k \det \mathbf{C}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{x}^t \mathbf{C}^{-1} \mathbf{x} \right\} dx_1 \dots dx_k, \quad (\text{A.1})$$

mit $\mathbf{x}^t := (x_1, \dots, x_k)$.

Satz A.2. Für eine k -dimensionale Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung N_k gilt

$$N_k(a_1, \dots, a_k; \mathbf{C}) = \int_{-\infty}^{a_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_1^2} N_{k-1} \left(\frac{a_2 - \rho_{12}x_1}{\sqrt{1 - \rho_{12}^2}}, \dots, \frac{a_k - \rho_{1k}x_1}{\sqrt{1 - \rho_{1k}^2}}; \mathbf{B} \right) dx_1, \quad (\text{A.2})$$

wobei $\mathbf{B} = (b_{ij})_{i,j=1,\dots,k-1}$ und $\mathbf{C} = (c_{ij})_{i,j=1,\dots,k}$ symmetrische Matrizen sind, für die gilt

$$\begin{aligned} c_{11} &= 1 \\ c_{1j} &= \rho_{1j} \\ c_{i1} &= \rho_{i1} \\ c_{ij} &= \rho_{1i}\rho_{1j} + \sqrt{(1 - \rho_{1i}^2)(1 - \rho_{1j}^2)}b_{i-1,j-1}. \end{aligned}$$

Kapitel A. Multivariate Normalverteilung

Beweis.

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{a_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_1^2} N_{k-1} \left(\frac{a_2 - \rho_{12} x_1}{\sqrt{1 - \rho_{12}^2}}, \dots, \frac{a_k - \rho_{1k} x_1}{\sqrt{1 - \rho_{1k}^2}}; \mathbf{B} \right) dx_1 \\ &= \int_{-\infty}^{a_1} \int_{-\infty}^{\frac{a_2 - \rho_{12} x_1}{\sqrt{1 - \rho_{12}^2}}} \dots \int_{-\infty}^{\frac{a_k - \rho_{1k} x_1}{\sqrt{1 - \rho_{1k}^2}}} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k \det \mathbf{B}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{x}^t \tilde{\mathbf{B}}^{-1} \mathbf{x} \right\} dx_1 \dots dx_k, \end{aligned}$$

mit

$$\tilde{\mathbf{B}}^{-1} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{B}^{-1} & \\ 0 & & & \end{array} \right)$$

und $\mathbf{x}^t = (x_1, x_2, \dots, x_k)$.

An dieser Stelle führen wir die Substitution

$$y_i = x_i \sqrt{1 - \rho_{1i}^2} + \rho_{1i} x_1 \quad \text{für } i = 2, \dots, k$$

ein. Danach gilt für den Vektor \mathbf{x}^t

$$(x_1, x_2, \dots, x_k) = (x_1, y_2, \dots, y_k) \begin{pmatrix} 1 & \frac{-\rho_{12}}{\sqrt{1 - \rho_{12}^2}} & \dots & \frac{-\rho_{1k}}{\sqrt{1 - \rho_{1k}^2}} \\ \hline 0 & \frac{1}{\sqrt{1 - \rho_{12}^2}} & & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \mathbf{0} & & \frac{1}{\sqrt{1 - \rho_{1k}^2}} \end{pmatrix} := \tilde{\mathbf{x}}^t \mathbf{D}.$$

Somit lässt sich unser Integral wie folgt schreiben

$$= \int_{-\infty}^{a_1} \int_{-\infty}^{a_2} \dots \int_{-\infty}^{a_k} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k \det \mathbf{B} \prod_{i=2}^k (1 - \rho_{1i}^2)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{x}}^t \mathbf{D} \tilde{\mathbf{B}}^{-1} \mathbf{D}^t \mathbf{x} \right\} dx_1 dy_2 \dots dy_k.$$

Wir definieren $\mathbf{C}^{-1} := \mathbf{D} \tilde{\mathbf{B}}^{-1} \mathbf{D}^t$, daraus folgt $\mathbf{C} = (\mathbf{D}^t)^{-1} \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{D}^{-1}$ oder explizit

$$\mathbf{C} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \rho_{12} & \sqrt{1 - \rho_{12}^2} & & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & \\ \rho_{1k} & \mathbf{0} & & \sqrt{1 - \rho_{1k}^2} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{B} & \\ 0 & & & \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & \rho_{12} & \dots & \rho_{1k} \\ 0 & \sqrt{1 - \rho_{12}^2} & & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \mathbf{0} & & \sqrt{1 - \rho_{1k}^2} \end{array} \right).$$

Die Matrix $\mathbf{C} = (c_{ij})_{i,j=1,\dots,k}$ ist dann eine symmetrische Matrix mit $c_{11} = 1$, $c_{1j} = \rho_{1j}$, $c_{i1} = \rho_{i1}$ und $c_{ij} = \rho_{1i}\rho_{1j} + \sqrt{(1 - \rho_{1i}^2)(1 - \rho_{1j}^2)}b_{i-1,j-1}$.

Weiter gilt

$$\det \mathbf{C} = \det \mathbf{B} \prod_{i=2}^k (1 - \rho_{1i}^2)$$

und für das Integral

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{a_1} \int_{-\infty}^{a_2} \dots \int_{-\infty}^{a_k} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k \det \mathbf{B} \prod_{i=2}^k (1 - \rho_{1i}^2)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{x}}^t \mathbf{D} \tilde{\mathbf{B}}^{-1} \mathbf{D}^t \mathbf{x} \right\} dx_1 dy_2 \dots dy_k \\ &= \int_{-\infty}^{a_1} \int_{-\infty}^{a_2} \dots \int_{-\infty}^{a_k} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k \det \mathbf{C}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{x}}^t \mathbf{C}^{-1} \mathbf{x} \right\} dx_1 dy_2 \dots dy_k \\ &= N_k(a_1, a_2, \dots, a_k; \mathbf{C}). \end{aligned}$$

□

Rekursionsformel für $N_k(\mathbf{b}_{1k}; \mathbf{R}_{1k})$

Es seien eine Zerlegung $\mathcal{Z}_n = \{0, T/n, 2T/n, \dots, (n-1)T/n, T\}$, ein Vektor $\mathbf{b}_{1k} = (b_1, b_2, \dots, b_k)$ und eine Korrelationsmatrix

$$\mathbf{R}_{1k} = \left\{ \sqrt{\frac{i \wedge j}{i \vee j}} \mid i, j = 1, 2, \dots, k \right\}$$

gegeben. Die Korrelationsmatrix hat die Form

$$\mathbf{R}_{1k} := \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{\frac{1}{2}} & \cdots & \sqrt{\frac{1}{k-1}} & \sqrt{\frac{1}{k}} \\ \sqrt{\frac{1}{2}} & 1 & \cdots & \sqrt{\frac{2}{k-1}} & \sqrt{\frac{2}{k}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \sqrt{\frac{1}{k-1}} & \sqrt{\frac{2}{k-1}} & \cdots & 1 & \sqrt{\frac{k-1}{k}} \\ \sqrt{\frac{1}{k}} & \sqrt{\frac{2}{k}} & \cdots & \sqrt{\frac{k-1}{k}} & 1 \end{pmatrix}$$

und entspricht bis auf das Vorzeichen in der letzten Zeile und Spalte der Matrix der Geske-Johnson-Formel (1.10). Nach Relation (4.34) in Kapitel 4 gilt

$$N_k(\mathbf{b}_{1k}; \mathbf{R}_{1k}) = \int_{-\infty}^{b_2} n(x_1) N(\sqrt{2}b_1 - x_1) \times \\ N_{k-2} \left(\frac{\sqrt{3}b_3 - \sqrt{2}x_1}{\sqrt{1}}, \frac{\sqrt{4}b_4 - \sqrt{2}x_1}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{\sqrt{k}b_k - \sqrt{2}x_1}{\sqrt{k-2}}; \mathbf{R}_{1,k-2} \right) dx_1.$$

Weiterhin kann Formel (4.34) auf N_{k-2} angewandt werden. Für N_{k-2} folgt

$$N_{k-2}(\cdot) = \int_{-\infty}^{\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{2}}b_4 - x_1} n(x_2) N(\sqrt{2}\sqrt{3}b_3 - 2x_1 - x_2) \times \\ N_{k-4} \left(\frac{\sqrt{5}b_5 - \sqrt{2}\sum_{i=1}^2 x_i}{\sqrt{1}}, \frac{\sqrt{6}b_6 - \sqrt{2}\sum_{i=1}^2 x_i}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{\sqrt{k}b_k - \sqrt{2}\sum_{i=1}^2 x_i}{\sqrt{k-4}}; \mathbf{R}_{1,k-4} \right) dx_2.$$

Eine wiederholte Anwendung von Formel (4.34) auf N_{k-4} führt zu

$$N_{k-4}(\cdot) = \int_{-\infty}^{\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}b_6 - \sum_{i=1}^2 x_i} n(x_3) N \left(\sqrt{2}\sqrt{5}b_5 - 2\sum_{i=1}^2 x_i - x_3 \right) \times \\ N_{k-6} \left(\frac{\sqrt{7}b_7 - \sqrt{2}\sum_{i=1}^3 x_i}{\sqrt{1}}, \frac{\sqrt{8}b_8 - \sqrt{2}\sum_{i=1}^3 x_i}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{\sqrt{k}b_k - \sqrt{2}\sum_{i=1}^3 x_i}{\sqrt{k-6}}; \mathbf{R}_{1,k-6} \right) dx_3.$$

Diese Vorgehensweise wird insgesamt $\lfloor k+1/2 \rfloor$ -mal wiederholt, so dass sich für die letzten Integralterme ergibt:

Falls k gerade ist

$$N_2(\cdot; \mathbf{R}_{12}) = \int_{-\infty}^{\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{2}}b_k - \sum_{i=1}^{k/2-1} x_i} n(x_{k/2}) N \left(\sqrt{2}\sqrt{k-1}b_{k-1} - 2 \sum_{i=1}^{k/2-1} x_i - x_{k/2} \right) dx_{k/2}.$$

Falls k ungerade ist

$$N_3(\cdot; \mathbf{R}_{13}) = \int_{-\infty}^{\frac{\sqrt{k-1}}{\sqrt{2}}b_{k-1} - \sum_{i=1}^{(k-3)/2} x_i} n(x_{(k-1)/2}) \times \\ N \left(\sqrt{2}\sqrt{k-2}b_{k-2} - 2 \sum_{i=1}^{(k-3)/2} x_i - x_{(k-1)/2} \right) N \left(\sqrt{k}b_k + \sqrt{2} \sum_{i=1}^{(k-1)/2} x_i \right) dx_{(k-1)/2}.$$

Eine allgemeine Rekursionsformel für $N_k(\mathbf{b}_{1k}; \mathbf{R}_{1k})$ ist somit

$$N_k(\mathbf{b}_{1k}; \mathbf{R}_{1k}) = \int_{-\infty}^{b_2} n(x_1) N(\sqrt{2}b_1 - x_1) \int_{-\infty}^{\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{2}}b_4 - x_1} n(x_2) N(\sqrt{2}\sqrt{3}b_3 - 2x_1 - x_2) \times \\ \int_{-\infty}^{\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}b_6 - \sum_{i=1}^2 x_i} n(x_3) N \left(\sqrt{2}\sqrt{5}b_5 - 2 \sum_{i=1}^2 x_i - x_3 \right) \times \dots \\ \dots \times \mathcal{G}_{\xi_k} dx_{\xi_k} dx_{\xi_k-1} \dots dx_1, \quad (\text{A.3})$$

mit

$$\mathcal{G}_{\xi_k} = \int_{-\infty}^{\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{2}}b_k - \sum_{i=1}^{k/2-1} x_i} n(x_{k/2}) N \left(\sqrt{2}\sqrt{k-1}b_{k-1} - 2 \sum_{i=1}^{k/2-1} x_i - x_{k/2} \right) dx_{k/2} \quad (\text{A.4})$$

für k gerade und

$$\mathcal{G}_{\xi_k} = \int_{-\infty}^{\frac{\sqrt{k-1}}{\sqrt{2}}b_{k-1} - \sum_{i=1}^{(k-3)/2} x_i} n(x_{(k-1)/2}) \times \\ N \left(\sqrt{2}\sqrt{k-2}b_{k-2} - 2 \sum_{i=1}^{(k-3)/2} x_i - x_{(k-1)/2} \right) N \left(\sqrt{k}b_k + \sqrt{2} \sum_{i=1}^{(k-1)/2} x_i \right) dx_{(k-1)/2} \quad (\text{A.5})$$

für k ungerade.

B. Einige Beweise und Bemerkungen

Satz B.1. *Es seien $S_{t,(n)}^*$ bzw. S_t^* die kritischen Preise (zur Zeit t) einer n -Bermuda-Put-Option bzw. einer amerikanischen Put-Option. Es gilt*

$$0 \leq S_{t,(n)}^* - S_t^* \leq K \sqrt{\left(\frac{\sigma^2}{r} + 2\right) (1 - e^{-r\Delta_n})}, \quad (\text{B.1})$$

wobei $\Delta_n := \max_i \{t_{i+1}^{(n)} - t_i^{(n)}\}$ die Feinheit der Zerlegung des Intervalls $[t, T]$ ist.

Beweis. Die Beweisidee stammt aus Chevalier [23]. Wir haben seinen Beweis auf unseren Fall angepasst und am Ende eine andere Abschätzung vorgeschlagen.¹

Für alle $S \in (S_t^*, \infty)$ erfüllt eine amerikanische Put-Option die Black-Scholes Differentialgleichung

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P^A}{\partial S^2} + rS \frac{\partial P^A}{\partial S} - rP^A + \frac{\partial P^A}{\partial t} = 0.$$

Sei $n \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $S_{t,(n)}^* \leq K$ gilt. Für diese n folgt dann für alle $S \in (S_t^*, S_{t,(n)}^*)$ $(K - S)\mathbb{1}_{\{S \leq K\}} = K - S$ und weiter

$$\begin{aligned} \frac{\sigma^2 (S_{t,(n)}^*)^2}{2} \frac{\partial^2 P^A}{\partial S^2}(S, \tau) &\geq rP^A(S, \tau) - rS \frac{\partial P^A}{\partial S}(S, \tau) - \frac{\partial P^A}{\partial t}(S, \tau) \\ &\geq rP^A(S, \tau) - rS \frac{\partial P^A}{\partial S}(S, \tau) \\ &\geq r(K - S) + rS - rS \left(\frac{\partial P^A}{\partial S}(S, \tau) + 1 \right) \\ &\geq rK - rS_{t,(n)}^* \left(\frac{\partial P^A}{\partial S}(S, \tau) + 1 \right). \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Das Integrieren der beiden Seiten der Ungleichung zwischen S_t^* und $S \in (S_t^*, S_{t,(n)}^*)$ liefert

¹Eine ähnliche Vorgehensweise bei der Abschätzung von Gamma kann auch in [79] gefunden werden.

$$\begin{aligned}
 \frac{\sigma^2(S_{t,(n)}^*)^2}{2} \left(\frac{\partial P^A}{\partial S}(S, \tau) + 1 \right) &\geq rK(S - S_t^*) - rS_{t,(n)}^* (P^A(S, \tau) - (K - S)) \\
 &\geq rK(S - S_t^*) - rS_{t,(n)}^* \left(P^A(S_{t,(n)}^*, \tau) - (K - S_{t,(n)}^*) \right), \tag{B.3}
 \end{aligned}$$

dabei gilt die letzte Abschätzung, weil die Funktion $S \rightarrow P^A(S, \tau) - (K - S)$ auf $[0, K]$ monoton wachsend ist. Es gilt

$$P^A(S_{t,(n)}^*, \tau) - (K - S_{t,(n)}^*) = P^A(S_{t,(n)}^*, \tau) - P_n^{(n)}(S_{t,(n)}^*, \tau).$$

Das Integrieren der beiden Seiten der Ungleichung (B.3), dieses Mal zwischen S_t^* und $S_{t,(n)}^*$, führt zu

$$\begin{aligned}
 \frac{\sigma^2(S_{t,(n)}^*)^2}{2} \left(P^A(S_{t,(n)}^*, \tau) - P_n^{(n)}(S_{t,(n)}^*, \tau) \right) &\geq \frac{1}{2} rK \left(S_{t,(n)}^* - S_t^* \right)^2 \\
 &\quad - rS_{t,(n)}^* \left(P^A(S_{t,(n)}^*, \tau) - P_n^{(n)}(S_{t,(n)}^*, \tau) \right) \left(S_{t,(n)}^* - S_t^* \right)
 \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
 rK \left(S_{t,(n)}^* - S_t^* \right)^2 &\leq S_{t,(n)}^* \left(P^A(S_{t,(n)}^*, \tau) - P_n^{(n)}(S_{t,(n)}^*, \tau) \right) \left((\sigma^2 + 2r)S_{t,(n)}^* - 2rS_t^* \right) \\
 &\leq (\sigma^2 + 2r)(S_{t,(n)}^*)^2 K (1 - e^{-r\Delta_n}) \\
 &\leq (\sigma^2 + 2r)K^3 (1 - e^{-r\Delta_n})
 \end{aligned}$$

und daraus

$$S_{t,(n)}^* - S_t^* \leq K \sqrt{\left(\frac{\sigma^2}{r} + 2 \right) (1 - e^{-r\Delta_n})}.$$

□

Bemerkung zur Konvexität von \hat{P}_n

Aus (4.51) folgt für die zweite partielle Ableitung des approximativen Preises einer n -Bermuda-Put-Option \hat{P}_{n-i} nach dem Aktienkurs S_i

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \hat{P}_{n-i}}{\partial S_i^2} &= \frac{n(d_1(S_i, K, T_i))}{S_i \sigma \sqrt{T_i}} \\ &+ \sum_{k=i+1}^{n-1} e^{-r(t_k - t_i)} \left(1 - e^{-r(t_{k+1} - t_k)}\right) K \frac{n(d_2(S_i, \hat{S}_k^*, t_k - t_i))}{S_i^2 \sigma^2 (t_k - t_i)} d_1(S_i, \hat{S}_k^*, t_k - t_i), \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

mit

$$d_2(S_1, S_2, \tau) = \frac{\log \frac{S_1}{S_2} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \tau}{\sigma \sqrt{\tau}}, \quad d_1(S_1, S_2, \tau) = d_2(S_1, S_2, t) + \sigma \sqrt{\tau}$$

und $n(\cdot)$ die Dichte der Standardnormalverteilung, d.h. $n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$.

Wegen des Terms d_1 in der Summe (B.4) kann es vorkommen (z.B. für $S_i < \hat{S}_{i+1}^*$), dass die ganze Summe negativ wird. In diesem Fall ist das Vorzeichen von $\frac{\partial^2 \hat{P}_{n-i}}{\partial S_i^2}$ ungewiss. Für $S_i \geq K$ allerdings ist jeder Summand der Summe (B.4) positiv. Daher ist die Funktion \hat{P}_{n-i} auf dem Intervall $S_i \in [K, \infty)$ konvex. Aufgrund von

$$n(d_2(S_i, \hat{S}_k^*, t_k - t_i)) = e^{r(t_k - t_i)} \frac{S_i}{\hat{S}_k^*} n(d_1(S_i, \hat{S}_k^*, t_k - t_i))$$

folgt für Gamma von \hat{P}_{n-i} in (B.4)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \hat{P}_{n-i}}{\partial S_i^2} &= \frac{n(d_1(S_i, K, T_i))}{S_i \sigma \sqrt{T_i}} \\ &+ \sum_{k=i+1}^{n-1} \left(1 - e^{-r(t_{k+1} - t_k)}\right) \frac{K}{\hat{S}_k^*} \frac{n(d_1(S_i, \hat{S}_k^*, t_k - t_i))}{S_i \sigma^2 (t_k - t_i)} d_1(S_i, \hat{S}_k^*, t_k - t_i). \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Benchmark-Preise amerikanischer Put-Optionen

Aufgrund der Tatsache, dass keine geschlossene Formel für die Preise amerikanischer Put-Optionen (abgesehen von einigen Grenzfällen) existiert und es darüber hinaus keine bekannten Fehlerabschätzungen für numerische Verfahren (außer beim Ansatz von Geske und Johnson) gibt, erweist es sich als problematisch die Preise amerikanischer Put-Optionen bis zu einer vorgegebenen Genauigkeit anzugeben. Broadie und Detem-

ple [17] haben vorgeschlagen ein konvergentes Verfahren zu nehmen und die Berechnung abubrechen, sobald die gewünschte Genauigkeit erreicht wird. Konkret haben Broadie und Detemple [17] ein 15×10^3 -periodigen Binomialmodell als Benchmark-Modell zur Bewertung amerikanischer Put-Optionen verwendet. Der Preis einer amerikanischen Put-Option aus dem Binomialmodell wurde als „wahrer“ Preis bezeichnet. Dem Vorschlag von Broadie und Detemple folgend und von der seitdem angestiegenen Rechenleistung profitierend wird in manchen Arbeiten heutzutage der „wahre“ Preis einer amerikanischen Put-Option P^A als der Preis P_N^{Bin} berechnet in einem N -periodigen Binomialmodell mit $N = 5 \times 10^4$, $N = 10 \times 10^4$ oder noch größer betrachtet. Die wesentliche Frage, ob für eine vorgegebene Genauigkeit ϵ (z.B. $\epsilon = 10^{-4}$) die Abweichung $|P^A - P_N^{\text{Bin}}|$ kleiner als ϵ ausfällt, wird dabei nicht beleuchtet. Aufgrund der oszillierenden Konvergenz ist diese Frage auch nicht einfach zu beantworten. Es gibt jedoch Fälle (wir nennen sie hier Spezialfälle) in welchen die Konvergenz im Binomialmodell monoton ist. Dies geht auch aus der folgenden Abbildungen hervor.

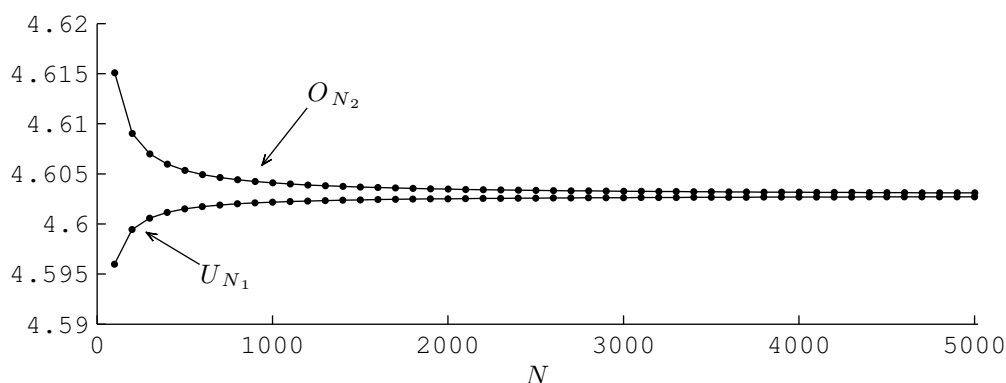


ABBILDUNG B.1.: KONVERGENZ DER PREISE AMERIKANISCHER PUT-OPTIONEN IM BINOMIALMODELL. PARAMETER: $S_0=45$, $K = 45$, $r = 0.04$, $\sigma = 0.3$, $T = 1$, $N_1 = 100, 200, \dots, 5000$, $N_2 = 101, 201, \dots, 5001$

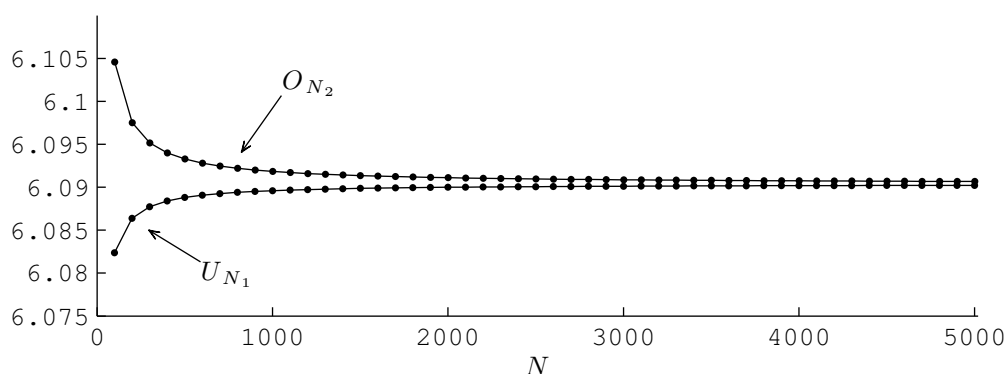


ABBILDUNG B.2.: KONVERGENZ DER PREISE AMERIKANISCHER PUT-OPTIONEN IM BINOMIALMODELL. PARAMETER: $S_0=100$, $K = 100$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.2$, $T = 1$, $N_1 = 100, 200, \dots, 5000$, $N_2 = 101, 201, \dots, 5001$

Wie aus Abbildungen B.1, B.2 ersichtlich, gibt es eine Unter- und Oberfolge (U_N und O_N), die monoton gegen den Preis einer amerikanischen Put-Option im Black-Scholes-Modell konvergieren. Sobald die Differenz von O_N und U_N kleiner als ϵ ausfällt, kann ebenso gefolgert werden, dass $|P^A - U_N| < \epsilon$ ist. Auf diese Weise kann eine beliebige Genauigkeit (in diesen Spezialfällen) gewährleistet werden. In der unten stehenden Tabelle ist die Differenz $O_N - U_N$ bei einer wachsenden Anzahl der Perioden N für einen anderen Spezialfall aufgetragen.

N	1k	50k	100k	250k	500k	1000k	
$(O_{N+1} - U_N)$	112.5	2.252	1.126	0.4504	0.2253	0.1126	$ \times 10^{-5}$

TABELLE B.1.: DIFFERENZEN DER FOLGEN O_N UND U_N BEI WACHSENDEM N . DABEI GILT $k := \times 10^3$.

In allen oben präsentierten Fällen wurde die monotone Konvergenz für *at-the-money* Optionen (Optionen für die $K = S_0$ gilt) beobachtet. Dabei ist U_N eine Folge mit einer geraden Anzahl an Perioden und O_N mit einer ungeraden. In anderen Fällen ($K \neq S_0$) ist die Konvergenz nicht mehr monoton und die Relation $U_{N_1} \leq O_{N_2}$ für $N_1 \in 2\mathbb{N}$ und $N_2 \in 2\mathbb{N}+1$ gilt auch nicht mehr. Wir vermuten, dass die monotone Konvergenz stark mit der Positionierung des Ausübungspreises K im Binomialbaum zusammenhängt. Daher wäre es von Interesse flexible Binomialbäume zu studieren, die die eben beschriebenen Eigenschaften des klassischen CRR-Baumes bei der Bewertung amerikanischer *at-the-money* Put-Optionen, sowohl für *out-of-the-money* ($K < S_0$), als auch für *in-the-money* ($K > S_0$) Put-Optionen beinhalten.

Die sogenannten Glättungstechniken zur monotonen Konvergenz wurden bereits unter anderen von Broadie und Detemple [17], Heston und Zhou [49], Leisen [80] und Joshi [62] vorgeschlagen. Die Frage nach dem Abbruchkriterium blieb allerdings ungeklärt. Deswegen möchten wir an dieser Stelle betonen, dass nicht nur die monotone Konvergenz allein dieser heuristischen Beobachtung geschuldet ist, sondern der Existenz einer Unter- und Oberfolge, die beide monoton gegen den Preis einer amerikanischen Put-Option im Black-Scholes-Modell konvergieren.

C. MATLAB - Code

C.0.3. Implementierung im Binomialmodell

Die Vorgehensweise bei der Bewertung amerikanischer Put-Optionen in einem Binomialmodell ist die folgende:

1. Parameter-, Bauminitialisierung
2. Ermittlung der Optionswerte bei Ablauf
3. Rückwärtsinduktion zur Ermittlung der Preise zur Zeit t_0

Die Quellcodes dazu sind nahezu in jedem Buch, welches sich mit numerischer Bewertung der Optionen befasst, zu finden. Der Standard Quellcode sieht wie folgt aus (vgl. [13]):

Algorithmus C.1 (Klassischer Algorithmus).

```
function price = amputLattice_standard(S0,K,r,sigma,T,N)

%Parameter definition
dt = T/N;
u = exp(sigma*sqrt(dt));
d = 1/u;
p = (exp(r*dt) - d)/(u-d);
p_u = p*exp(-r*dt);
p_d = (1-p)*exp(-r*dt);

%Underlying
stock = zeros(2*N+1,1);
stock(N+1) = S0;

for i=1:N
    stock(N+1+i) = u*stock(N+1);
    stock(N+1-i) = d*stock(N+1);
end

%Option terminal value
option = zeros(2*N+1,1);
for i=1:2:2*N+1
    option(i) = max(K-stock(i), 0);
end

%Backwards valuation
```

Kapitel C. MATLAB - Code

```
for i=1:N
for j=(i+1):2:(2*N+1-i)
    evalue = p_u*option(j+1) + p_d*option(j-1);
    option(j) = max(evalue, K-stock(j));
end

%Option price
price = option(N+1);
end
```

Wir können die Preisberechnung, vor allem für große N beschleunigen, indem wir bei der Implementierung die MATLAB-spezifische vektorielle Berechnungsweise verwenden. Für einen tieferen Einblick in die Implementierung des Binomialmodells in MATLAB und eine Performanceanalyse verweisen wir dabei auf Higham [50].

Algorithmus C.2 (Klassischer Algorithmus vektoriell).

```
function erg = amputLattice_improved(S0,K,r,sigma,T,N)

%Parameter definition
dt = T/N;
u = exp(sigma*sqrt(dt));
d = 1/u;
p = (exp(r*dt) - d)/(u-d);
p_u = p*exp(-r*dt);
p_d = (1-p)*exp(-r*dt);

%Underlying
stock = [S0*d.^(N:-1:1), S0*u.^(0:N)];

%Intrinsic value
ivalue = max(K-stock(1:end),0);

%Option terminal value
option = ivalue;

%Backwards valuation
for i=1:N
    %Expected value
    evalue = p_u*option(i+2:2*2*N+2-i)+p_d*option(i:2:2*N-i);
    %American put
    option(i+1:2:2*N+1-i) = max(ivalue(i+1:2:2*N+1-i),evalue);
end

%Option price
erg = option(N+1);

end
```

Boundary-Algorithmus

Algorithmus C.3 (Boundary-Algorithmus).

```
function [price,boundary] = boundary_algorithm(S0,K,r,sigma,T,N)

%Parameter definition
dt = T/N;
u = exp(sigma*sqrt(dt));
d = 1/u;
p = (exp(r*dt) - d)/(u-d);
p_u = p*exp(-r*dt);
p_d = (1-p)*exp(-r*dt);

%Underlying
stock = [S0*d.^(N:-1:1), S0*u.^(0:N)];
%Critical boundary
cb=zeros(1,N+1);
%Critical index
ci=zeros(1,N+1);
%i_N
%
iN=0.5*log(K*u^N/S0)/log(u);
iN=floor(iN+1e-6);
iN_mod=iN*2+1;

if iN_mod>=2*N+1
    price=K-S0;
    boundary=S0*u.^(0:N);
    return
end

if iN_mod==1
    price=(K-stock(1))*p_d^N;
    boundary=stock(1)*ones(1,N+1);
    return
end

if iN_mod<1
    price=0;
    boundary=cb;
    return
end
%
%Option array
option=zeros(1,N+iN+2);
%Terminal values
option(iN_mod)=K-stock(iN_mod);
ci(N+1)=iN_mod;
cb(N+1)=stock(iN_mod);

flag=0;
```

Kapitel C. MATLAB - Code

```
%Backwards valuation
for i=1:N
    %Last boundary index +1
    last_ci=ci(N+2-i)+1;
    %Lower tree limit oder iN+i
    tmax=min(iN_mod+i,2*N+1-i);
    %Upper tree limit or critical boundary +1
    tmin=max(i+1,last_ci);

    for j=tmin:2:tmax
        %Discounted expected value
        option(j) = p_u*option(j+1) + p_d*option(j-1);
    end
    %Check for exercise
    if option(tmin)<=K-stock(tmin)
        ci(N+1-i)= tmin;
        cb(N+1-i)=stock(tmin);
        option(tmin)=K-stock(tmin);
    else
        %Check that critical index/boundary well defined
        if i+1<= last_ci-2
            ci(N+1-i)=last_ci-2;
            cb(N+1-i)=stock(last_ci-2);
            option(last_ci-2)=K-stock(last_ci-2);
        end
    end

    %Check whether critical index is at upper tree limit
    if ci(N+1-i)==2*N+1-i
        flag=1;
        break
    end

end

%Results
if flag==1
    price=K-S0;
    boundary=[S0*u.^(0:N-1-i),cb(N+1-i:N+1)];
else
    price = option(N+1);
    boundary=cb;
end

end
```

Zeitgewinn für große N , etwa ab $N = 1000, 2000$ falls die *for*-Schleife

```
for j=tmin:2:tmax
    %Discounted expected Value
    option(j) = p_u*option(j+1) + p_d*option(j-1);
end
```

durch die von MATLAB-spezifische vektorielle Berechnungsweise ersetzt wird

Algorithmus C.4 (Boundary-Algorithmus vektoriell).

```
function [price,boundary] = boundary_algorithm_improved(S0,K,r,sigma,T,N)

%...

option(tmin:2:tmax)=p_u*option(tmin+1:2:tmax+1)+p_d*option(tmin-1:2:tmax-1);

%...

end
```

C.0.4. Implementierung im Black-Scholes-Modell

Hier werden die Quellcodes für Algorithmen aus Abschnitt 4.2 aufgelistet: zunächst die Algorithmen zur direkten Berechnung nach der analytischen Geske-Johnson-Formel (1.10) und danach die Algorithmen zur approximativen Berechnung.

Direkte Berechnung

Algorithmus C.5 (n -Bermuda-Put-Option P_n).

```
function [price,boundary]=gjformel(exrsset,S0,K,r,sigma,prec)

N=length(exrsset);
cb=zeros(1,N); %critical boundary
cb(N)=K; %at time T

for i=N-1:-1:1 %create boundary
    time=exrsset-exrsset(i);
    CB_old=0;
    CB_new=cb(i+1);
    %Newton routine
    while abs(CB_old-CB_new)>prec
        CB_old=CB_new;
        CB_new=newtonstep(time(i+1:N),cb(i+1:N),CB_old,r,sigma);
    end
    cb(i)=CB_new;
    disp(i);
end

price=gjprice(exrsset,cb,S0,r,sigma); %calculate gjprice
boundary=cb;
end
```

Kapitel C. MATLAB - Code

Algorithmus zur Berechnung des Preises einer n -Bermuda-Put-Option mit bekanntem kritischen Rand:

```
function price = gjprice(time,boundary,S0,r,sigma)
% time - set of exercise points
% boundary - critical boundary
N=length(time);

b=(log(S0./boundary)+(r-0.5*sigma^2).*time)./(sigma*sqrt(time));
a=b+sigma*sqrt(time);

corr=getcorr_neqs(time);

sum1=0;

for i=1:N
    b_i=b(1:i);
    b_i(:,i)=-b_i(:,i);

    corr_i=corr(1:i,1:i);
    corr_i(:,i)=-corr_i(:,i);
    corr_i(i,:)=-corr_i(i,:);

    disp(corr_i);
    sum1=sum1+exp(-r*time(i))*mvncdf(b_i,zeros(1,i),...
        corr_i, statset('MaxFunEvals', 1e12, 'TolFun', 1e-4));
end

price=boundary(N)*sum1-S0*(1-mvncdf(a,zeros(1,N),...
    corr, statset('MaxFunEvals', 1e12, 'TolFun', 1e-4)));
end
```

Korrelationsmatrix für die multivariaten Normalverteilungen:

```
function matrix = getcorr_neqs(time)
%Correlation matrix, not equally spaced
% time is a set of points of intervall [0,T], e.g. {T/N, 2T/N,...,T},
% without 0
size=length(time);% first point is excluded
m=zeros(size,size);

for i=1:size
    for j=i:size
        m(i,j)=sqrt(time(i)/time(j));
    end
end
matrix=m+m'-diag(ones(size,1));
end
```

Richardson-Extrapolation:

```
function extrpl = richardson(pricearray)
%pricearray - bermudan option prices
N=length(pricearray);
sum=0;
for i=1:N
    sum=sum+((-1)^(N-i)*i^(N-1))*pricearray(i)/(factorial(i-1)*factorial(N-i));
end
extrpl=sum;
end
```

Approximative Berechnung

Algorithmus C.6 (n -Bermuda-Put-Option \hat{P}_n).

```
function [bermudan, boundary] = nbermudan(time,N,S_0,K,r,sigma, tol)
%Input parameter:
%time:= 0=t_0,t_1,t_2,...,t_n=T
%S0 - price of underlying
%K - strike price
%r - interest rate
%sigma - volatility
%tol - tolerance

%Critical boundary init
S_crit=zeros(1,N);
S_crit(N)=K;
%Calculation of critical boundary
for i=N-1:-1:1
    S_after=S_crit(i+1);
    S_prior=0;
    % Newton-Raphson method
    while abs(S_prior-S_after)>tol
        S_prior=S_after;
        %Early exercise premium and Delta of eep
        [eep,d_eep]=eep_delta(time,N,i,S_crit,S_prior,K,r,sigma);
        dMaturity=time(N+1)-time(i+1);
        %European and Delta of european option
        [Pe,d_Pe]=europut(dMaturity,S_prior,K,r,sigma);
        %Bermudan option
        Pb=Pe+eep;
        %Delta of bermudan option
        d_Pb=d_Pe+d_eep;
        %Newton-Raphson step
        S_after=(K-Pb+d_Pb*S_prior)/(1+d_Pb);
    end
    S_crit(i)=S_after;
end
```

Kapitel C. MATLAB - Code

```
%Calculate bermudan option with known critical boundary
arrayofbermudas=zeros(1,length(S_0)); %for different values of S_0
for i=1:length(S_0)
    arrayofbermudas(i)=europut(time(N+1),S_0(i),K,r,sigma)...
        +eep_delta(time,N,0,S_crit,S_0(i),K,r,sigma);
end

bermudan=arrayofbermudas; %output bermudan
boundary=S_crit; %output critical boundary
```

Early-Exercise-Prämie (EEP) und die Ableitung von EEP:

```
function [eep, d_eep] = eep_delta(time, N, i, S_crit, S, K, r, sigma)

if i>N-2
    eep=0;
    d_eep=0;
else
    total=0;
    d_total=0;
    %Calculate early exercise premium
    for k=i+1:N-1
        dStep=time(k+2)-time(k+1);
        dMaturity=time(k+1)-time(i+1);
        sigmaSqrt=sigma*sqrt(dMaturity);
        d2=(log(S./S_crit(k))+(r-0.5*sigma^2)*dMaturity)./sigmaSqrt;
        jointterm=exp(-r*dMaturity)*(1-exp(-r*dStep))*K;
        total=total+jointterm*normcdf(-d2);
        d_total=d_total-jointterm*exp(-0.5*d2^2)/(S*sqrt(2*pi)*sigmaSqrt);
    end
    eep=total; %early exercise premium
    d_eep=d_total; %derivative of early exercise premium
end
```

Preis einer europäischen Put-Option:

```
function [put,deltaput] = europut(LAUFZEIT,S,K,r,sigma)
%P = europut(LAUFZEIT,S_0,K,r,sigma)
sigmaSqrt=sigma*sqrt(LAUFZEIT);
d_1=(log(K./S)-(r+0.5*sigma^2)*LAUFZEIT)./sigmaSqrt;
deltaput=-normcdf(d_1);
put=K.*exp(-r*LAUFZEIT).*normcdf(d_1+sigmaSqrt)+S.*deltaput;
end
```

Literaturverzeichnis

- [1] AITSAHLIA, F., AND CARR, P. American options: A comparison of numerical methods. In *Numerical Methods in Finance*, L. C. G. Rogers and D. Talay, Eds. Cambridge University Press, 1997, pp. 67–87.
- [2] AMIN, K., AND KHANNA, A. Convergence of american option values from discrete- to continuous-time financial models. *Mathematical Finance* 4, 4 (1994), 289–304.
- [3] BARLES, G., BURDEAU, J., ROMANO, M., AND SAMSEN, N. Critical stock price near expiration. *Mathematical Finance* 5, 2 (1995), 77–95.
- [4] BARONE-ADESI, G. The saga of the american put. *Journal of Banking & Finance* 29, 2909–2918 (2005).
- [5] BARONE-ADESI, G., AND ELLIOTT, R. J. Approximations for the values of american options. *Stochastic Analysis and Applications* 9, 2 (1991), 115–131.
- [6] BARONE-ADESI, G., AND WHALEY, R. E. Efficient analytic approximation of american option values. *Journal of Finance* 42, 2 (1987).
- [7] BASSO, A., NARDON, M., AND PIANCA, P. Discrete and continuous time approximations of the optimal exercise boundary of american options. Working Paper, November 2001.
- [8] BAULE, R., AND WILKENS, M. Lean trees - a general approach improving performance of lattice models for option pricing. *Review of Derivatives Research* 7 (2004), 53–72.
- [9] BENSOUSSAN, A. On the theory of option pricing. *Acta Applicandae Mathematicae* 2, 139–158 (1984).
- [10] BLACK, F., AND SCHOLES, M. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy* 81, 3 (1973), 637–654.
- [11] BOYLE, P. P. Option valuation using a three jump process. *International Options Journal* 3 (1986).
- [12] BOYLE, P. P. A lattice framework for option pricing with two state variables. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 23, 1 (1988).
- [13] BRANDIMARTE, P. *Numerical Methods in Finance and Economics: A MATLAB-Based Introduction*. John Wiley & Sons, 2006.

- [14] BREEN, R. The accelerated binomial option pricing model. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 26, 2 (1991), 153–164.
- [15] BRENNAN, M. J., AND SCHWARTZ, E. S. The valuation of american put options. *Journal of Finance* 32, 2 (1977), 449–462.
- [16] BRENNAN, M. J., AND SCHWARTZ, E. S. Finite difference methods and jump processes arising in the pricing of contingent claims: A synthesis. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 13, 3 (1978), 461–474.
- [17] BROADIE, M., AND DETEMPLE, J. American option valuation: New bounds, approximations, and a comparison of existing methods. *Review of Financial Studies* (1996).
- [18] BROADIE, M., AND GLASSERMAN, P. Pricing american-style securities using simulation. *Journal of Economic Dynamics & Control* 21 (1997), 1323–1352.
- [19] BUNCH, S. D., AND JOHNSON, H. E. The american put option and its critical stock price. *Journal of Finance* 55, 5 (October 2000).
- [20] CARR, P., JARROW, R., AND MYNENI, R. Alternative characterizations of american put options. *Mathematical Finance* 2, 2 (1992), 87–106.
- [21] CARVERHILL, A., AND WEBBER, N. American options: theory and numerical analysis. In *Options: Recent Advances in Theory and Practice*, S. Hodges, Ed. Manchester University Press, 1990, pp. 80–94.
- [22] CHANG, C.-C., CHUNG, S.-L., AND STAPLETON, R. C. Richardson extrapolation techniques for the pricing of american-style options. *Journal of Futures Markets* 27, 8 (2007), 791–817.
- [23] CHEVALIER, E. Bermudean approximation of the free boundary associated with an american option. In *Free Boundary Problems: Theory and Applications*, I. N. Figueiredo and J. F. Rodrigues, Eds., vol. 154. Birkhäuser, 2007, pp. 137–147.
- [24] CHIARELLA, C., KUCERA, A., AND ZIOGAS, A. A survey of the integral representation of american option prices. Research Paper Series 118, Quantitative Finance Research Centre, University of Technology Sydney, 2004.
- [25] COX, J. C., ROSS, S. A., AND RUBINSTEIN, M. Option pricing: A simplified approach. *Journal of Financial Economics* 7 (1979), 229–263.
- [26] COX, J. C., AND RUBINSTEIN, M. *Options Markets*. Prentice-Hall, 1985.
- [27] CRAIG, P. A new reconstruction of multivariate normal orthant probabilities. *Royal Statistical Society* 70 (2008).
- [28] CURNOW, R. N., AND DUNNET, C. W. The numerical evaluation of certain multivariate normal integrals. *Annals of Mathematical Statistics* 33, 2 (1962), 571–579.

- [29] CUTLAND, N. J., KOPP, P. E., WILLINGER, W., AND WYMAN, M. C. Convergence of snell envelopes and critical prices in the american put. In *Mathematics of Derivative Securities*, M. A. H. Dempster and S. R. Pliska, Eds. Cambridge University Press, 1997.
- [30] DAHLQUIST, G., AND BJÖRCK, Å. *Numerical Methods in Scientific Computing*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2008.
- [31] DAI, M., AND KWOK, Y.-K. Options with combined reset rights on strike and maturity. *Journal of Economic Dynamics & Control* 29, 9 (2005), 1495–1515.
- [32] DEÁK, I. *Random Number Generators and Simulation (Mathematical methods of operations research)*. Akademiai Kiado, 1990.
- [33] EVANS, J. D., KUSKE, R. A., AND KELLER, J. B. American options on assets with dividends near expiry. *Mathematical Finance* 12, 3 (2002), 219–237.
- [34] FU, M. C., LAPRISE, S. B., MADAN, D. B., SU, Y., AND WU, R. Pricing american options: A comparison of monte carlo simulation approaches. *Journal of Computational Finance* 4, 3 (2001), 39–88.
- [35] GAO, B., HUANG, J.-Z., AND MARTI, S. The valuation of american barrier options using the decomposition technique. *Journal of Economic Dynamics & Control* 24 (2000), 1783–1827.
- [36] GASSMANN, H., DEÁK, I., AND SZÁNTAI, T. Computing multivariate normal probabilities: A new look. *Journal of Computational and Graphical Statistics* 11, 4 (2002), 920–949.
- [37] GENZ, A. Numerical computation of multivariate normal probabilities. *Journal of Computational and Graphical Statistics* 1, 2 (1992), 141–149.
- [38] GENZ, A. Comparison of methods for the computation of multivariate normal probabilities. *Computing Sciences and Statistics* 25 (1993).
- [39] GENZ, A., AND BRETZ, F. Numerical computation of multivariate t-probabilities with application to power calculation of multiple contrasts. *Journal of Statistical Computation and Simulation* 63 (1999).
- [40] GENZ, A., AND BRETZ, F. *Computation of Multivariate Normal and t Probabilities*. Springer, 2009.
- [41] GESKE, R., AND JOHNSON, H. E. The american put option valued analytically. *Journal of Finance* 39, 5 (1984).
- [42] GLASSERMAN, P. *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Springer, 2003.
- [43] GLASSERMAN, P., AND YU, B. Number of paths versus number of basis functions in american option pricing. *Annals of Applied Probability* 14, 4 (2004), 2090–2119.

- [44] GOODMAN, J., AND OSTROV, D. N. On the early exercise boundary of the american put option. *Society for Industrial and Applied Mathematics* 62, 5 (2002), 1823–1835.
- [45] GRANT, D., VORA, G., AND WEEKS, D. E. Simulation and the early exercise option problem. *Journal of Financial Engineering* 5, 3 (1996), 211–227.
- [46] GUO, J.-H., HUNG, M.-W., AND SO, L.-C. A generalization of the barone-adesi and whaley approach for the analytic approximation of american options. *Journal of Futures Markets* 29, 5 (2009), 478–493.
- [47] HARRISON, M. J., AND KREPS, D. M. Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets. *Journal of Economic Theory* 20, 381–408 (1979).
- [48] HARRISON, M. J., AND PLISKA, S. R. Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading. *Stochastic Processes and their Applications* 11, 215–260 (1981).
- [49] HESTON, S., AND ZHOU, G. On the rate of convergence of discrete-time contingent claims. *Mathematical Finance* 10, 1 (2000), 53–75.
- [50] HIGHAM, D. J. Nine ways to implement the binomial method for option valuation in matlab. *Society for Industrial and Applied Mathematics* 44, 4 (2002), 661–677.
- [51] HUANG, J.-Z., SUBRAHMANYAM, M. G., AND YU, G. G. Pricing and hedging american options: A recursive integration method. *Review of Financial Studies* 9, 1 (1996), 277–300.
- [52] HULL, J. C. *Options, Futures, and Other Derivatives*, 7 ed. Prentice-Hall, 2008.
- [53] HULL, J. C., AND WHITE, A. The use of the control variate technique in option pricing. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 23, 3 (1988).
- [54] IBÁÑEZ, A. Robust pricing of the american put option: A note on richardson extrapolation and the early exercise premium. *Management Science* 49, 9 (2003), 1210–1228.
- [55] IWAKI, H., KIJIMA, M., AND YOSHIDA, T. American put options with a finite set of exercisable time epochs. *Mathematical and Computer Modelling* 22, 10–12 (1995), 89–97.
- [56] JABBOUR, G. M., KRAMIN, M. V., KRAMIN, T. V., AND YOUNG, S. D. Multinomial lattices and derivatives pricing. *Advances in Quantitative Analysis of Finance and Accounting-New Series* 2 (2005).
- [57] JACKA, S. D. Optimal stopping and the american put. *Mathematical Finance* 1, 2 (1991), 1–14.
- [58] JAILLET, P., LAMBERTON, D., AND LAPEYRE, B. Variational inequalities and the pricing of american options. *Acta Applicandae Mathematicae* 21, 263–289 (1990).

- [59] JARROW, R. A., AND RUDD, A. *Option Pricing*. Richard D. Irwin, Inc., 1983.
- [60] JEANBLANC, M., YOR, M., AND CHESNEY, M. *Mathematical Methods for Financial Markets*. Springer, 2009.
- [61] JOHNSON, H. E. An analytic approximation for the american put price. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 18, 1 (1983), 141–148.
- [62] JOSHI, M. S. Achieving smooth asymptotics for the prices of european options in binomial trees. *Quantitative Finance* 9, 2 (2009), 171–176.
- [63] JOSHI, M. S. The convergence of binomial trees for pricing the american put. *Journal of Risk* 11, 4 (2009), 87–108.
- [64] JOSHI, M. S., AND STAUNTON, M. On the analytical/numerical pricing of american put options against binomial tree prices. *Quantitative Finance* 12, 1 (2012), 17–20.
- [65] JU, N. Pricing an american option by approximating its early exercise boundary as a multipiece exponential function. *Review of Financial Studies* 11, 3 (1998), 627–646.
- [66] JU, N., AND ZHONG, R. An approximate formula for pricing american options. *Journal of Derivatives* 7, 2 (1999), 31–40.
- [67] KALLAST, S., AND KIVINUKK, A. Pricing and hedging american options using approximations by Kim integral equations. *European Finance Review* 7 (2003), 361–383.
- [68] KAMRAD, B., AND RITCHKEN, P. Multinomial approximating models for options with k state variables. *Management Science* 37, 12 (1991), 1640–1652.
- [69] KARATZAS, I. On the pricing of american options. *Applied Mathematics and Optimization* 17, 37-60 (1988).
- [70] KARATZAS, I., AND SHREVE, S. E. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer, 1991.
- [71] KIM, I. J. The analytic valuation of american options. *Review of Financial Studies* 3, 4 (1990), 547–572.
- [72] KIM, I. J., AND BYUN, S. J. Optimal exercise boundary in a binomial option pricing model. *Journal of Financial Engineering* 3, 2 (1994), 137–158.
- [73] KUSKE, R. A., AND KELLER, J. B. Optimal exercise boundary for an american put option. *Applied Mathematical Finance* 5, 2 (1998). Optimal exercise boundary for an American put option.
- [74] KWOK, Y.-K. *Mathematical Models of Financial Derivatives*. Springer, 2008.

- [75] LAMBERTON, D. Convergence of the critical price in the approximation of american options. *Mathematical Finance* 3, 2 (April 1993), 179–190.
- [76] LAMBERTON, D. Critical price for an american option near maturity. In *Seminar on Stochastic Analysis, Random Fields and Applications.*, E. Bolthausen, M. Dozzi, and F. Russo, Eds. Birkhäuser, 1995.
- [77] LAMBERTON, D. Error estimates for the binomial approximation of american put options. *Annals of Applied Probability* 8, 1 (1998), 206–233.
- [78] LAMBERTON, D., AND LAPEYRE, B. *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*, second edition ed. Chapman & Hall/CRC, 2008.
- [79] LAMBERTON, D., AND VILLENEUVE, S. Critical price near maturity for an american option on a dividend-paying stock. *Annals of Applied Probability* 13, 2 (2003), 800–815.
- [80] LEISEN, D. P. Pricing the american put option: A detailed convergence analysis for binomial models. *Journal of Economic Dynamics & Control* 22 (1998), 1419–1444.
- [81] LI, M. A quasi-analytical interpolation method for pricing american options. Working Paper, 2008.
- [82] LI, M. Analytical approximations for the critical stock prices of american options: a performance comparison. *Review of Derivatives Research* 13, 1 (2010), 75–99.
- [83] LI, M. A quasi-analytical interpolation method for pricing american options under general multi-dimensional diffusion processes. *Review of Derivatives Research* 13, 2 (2010), 177–217.
- [84] LITTLE, T., PANT, V., AND HOU, C. A new integral representation of the early exercise boundary for american put options. *Journal of Computational Finance* (2000).
- [85] LONGSTAFF, F. A., AND SCHWARTZ, E. S. Valuing american options by simulation: A simple least-squares approach. *Review of Financial Studies* 14, 1 (2001), 113–147.
- [86] MACMILLAN, L. W. Analytic approximation for the american put option. *Advances in Futures and Options Research* 1, 119–139 (1986).
- [87] McDONALD, R. L., AND SCHRODER, M. A parity result for american options. *Journal of Computational Finance* (2000).
- [88] MCKEAN, H. P. Appendix: a free boundary problem for the heat equation arising from appendix: a free boundary problem for the heat equation arising from a problem in mathematical economics. *Industrial Management Review* 6, 32–39 (1965).

- [89] MERTON, R. C. Theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science* 4, 1 (1973), 141–183.
- [90] MI, X., MIWA, T., AND HOTHORN, T. mvtnorm: New numerical algorithm for multivariate normal probabilities. *R Journal* 1 (2009).
- [91] MIWA, T., HAYTER, A. J., AND KURIKI, S. The evaluation of general non-centered orthant probabilities. *Royal Statistical Society* 65 (2003).
- [92] MUSIELA, M., AND RUTKOWSKI, M. *Martingale Methods in Financial Modelling*. Springer, 2010.
- [93] MYNENI, R. The pricing of american option. *Annals of Applied Probability* 2, 1 (1992), 1–23.
- [94] PESKIR, G. A change-of-variable formula with local time on curves. *Journal of Theoretical Probability* 18, 3 (2005), 499–535.
- [95] PESKIR, G. On the american option problem. *Mathematical Finance* 15, 1 (2005), 169–181.
- [96] PESKIR, G., AND SHIRYAEV, A. *Optimal Stopping and Free-Boundary Problems*. Birkhäuser, 2006.
- [97] PRÉKOPA, A., AND SZÁNTAI, T. On the analytical-numerical valuation of the bermudan and american options. *Quantitative Finance* (2010).
- [98] PRÉKOPA, A., AND SZÁNTAI, T. On the binomial tree method and other issues in connection with pricing bermudan and american options. *Quantitative Finance* 12, 1 (2011), 21–26.
- [99] PRESS, W. H., TEUKOLSKY, S. A., VETTERLING, W. T., AND FLANNERY, B. P. *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*, 3 ed. Cambridge University Press, 2007.
- [100] PRESSACCO, F., GAUDENZI, M., ZANETTE, A., AND ZIANI, L. New insights on testing the efficiency of methods of pricing and hedging american options. *European Journal of Operational Research* 185, 235–254 (2008).
- [101] RENDLEMAN, R. J., AND BARTTER, B. J. Two-state option pricing. *Journal of Finance* 34, 5 (1979).
- [102] SCHERVISH, M. J. Multivariate normal probabilities with error bound. *Royal Statistical Society* (1984).
- [103] SCHRODER, M. A reduction method applicable to compound option formulas. *Management Science* 35, 7 (1989), 823–827.
- [104] SCHWARTZ, E. S. The valuation of warrants: Implementing a new approach. *Journal of Financial Economics* 4, 79–93 (1977).

- [105] SCHWEIZER, M. On bermudan options. In *Advances in Finance and Stochastics. Essays in Honour of Dieter Sondermann.*, K. Sandmann and P. J. Schönbucher, Eds. Springer, 2002, pp. 257–269.
- [106] SELBY, M. J. P., AND HODGES, S. D. On the evaluation of compound options. *Management Science* 33, 3 (March 1987), 347.
- [107] STAUNTON, M. Efficient estimates for valuing american options. In *The Best of Wilmott 2*, P. Wilmott, Ed. John Wiley & Sons, 2005, ch. 8.
- [108] THOMASSEN, L., AND VAN WOUWE, M. The n-fold compound option. Tech. rep., University of Antwerp, Faculty of Applied Economics, 2001.
- [109] TIAN, Y. A modified lattice approach to option pricing. *Journal of Futures Markets* 13, 5 (1993).
- [110] TILLEY, J. A. Valuing american options in a path simulation model. *Transactions of the Society of Actuaries* 45 (1993), 83–104.
- [111] TONG, Y. L. *The Multivariate Normal Distribution*. Springer, 1990.
- [112] WILMOTT, P., HOWISON, S., AND JEFF, D. *The Mathematics of Financial Derivatives*. Cambridge University Press, 1995.